Tällä tehtäväpaketilla voi suorittaa kurssin Lineaaralgebra I (kurssikoodi MATHC1230) Vaasan yliopistossa. Ratkaisut lähetetään luennoijalle osoitteeseen

`tommi.sottinen@uwasa.fi`

otsikolla

`MATHC1230-paketti`.

Ratkaisut tulee olla käsin kirjoitettu ja ne tulee lähettää PDF-muodossa yhtenä liitetiedostona, jonka nimi on

`MATHC1230-Opiskelijanumero_Sukunimi_Etunimi.pdf`.

Kurssin arvosana määräytyy tehtyjen tehtävien lukumäärän mukaan seuraavasti: 14 tehtävää = 5, 12 tehtävää = 4, 10 tehtävää = 3, 8 tehtävää = 2, 6 tehtävää = 1.

Alkupään tehtäviin teko-ohjeet löytyvät oppikirjasesta Lineaarialgebraa lähinnä tasossa hipauksella GNU Octavea. Loppupään tehtäviin teko-ohjeet löytyvät Googlesta.

Laskinten käyttö on sallittua. Kaverille kilauttaminen on sallittua, mutta vain kohtuudella, eli yhteistyötä saa tehdä, mutta omat ratkaisut on silti kirjoitettava käsin.

1. Piirrä seuraavat suorat (samaan tai eri) x_1x_2-tasoon:
   (a) $2x_1 - x_2 = 4$.
   (b) $x_1 - 3x_2 = 0$.
   (c) $t(2,-5) + (0,2)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Olkoot $\mathbf{x} = [-0.50 \;\; 3.50]^\top$, $\mathbf{y} = [3.00 \;\; 0.00]^\top$ ja $\mathbf{z} = [0.00 \;\; 0.25]^\top$.
   (a) Laske $1.25\mathbf{x} - 0.50\mathbf{y}$.
   (b) Laske $0.75\mathbf{x} - 2.50\mathbf{y} - 3.00\mathbf{z}$.
   (c) Etsi sellaiset luvut a ja b, että $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$.

3. Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.50 \\ 0.00 & -1.50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1.00 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

   (a) Laske $-0.50\mathbf{A}^\top - 0.25\mathbf{B} + 1.75\mathbf{C}$.
   (b) Laske $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$.
   (c) Matriisin $\mathbf{M}$ matriisipotenssi määritellään asettamalla $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{M}$, jne. Vastaavasti negatiivinen matriisipotenssi määritellään asettamalla $\mathbf{M}^{-2} = (\mathbf{M}^2)^{-1}$, $\mathbf{M}^{-3} = (\mathbf{M}^3)^{-1}$ jne.

   Laske $\mathbf{B}^{-2022}\mathbf{C}^{2^{128}-1}$.

4. Olkoon a vapaa parametri ja olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Käännä seuraavat matriisit, tai perustele, että ne eivät ole kääntyviä
   (a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2\xi \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

(b)
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2a \\ 0 & \xi \end{bmatrix},$$

(c)
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -\xi \\ -1 & a \end{bmatrix}.$$

5. Olkoot a ja b vapaita parametreja ja olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Etsi seuraavien yhtälöparien **kaikki** ratkaisut:

   (a)
$$\begin{cases} 2x_1 - \xi x_2 = 1 \\ 3x_1 = 2 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} 4x_1 - a x_2 = 0 \\ \xi x_2 = 1 \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} 4x_1 + \xi x_2 = b \\ 2x_1 + a x_2 = 1 \end{cases}.$$

6. Olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Olkoon $z_1 = \xi + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ ja $z_3 = 1 - \xi\mathrm{i}$. Laske

   (a) $z_1 - 3z_2 + z_3^*$,
   (b) $z_1 z_2^* z_3$,
   (c) $(z_1/z_2)/z_3$.

7. Olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Etsi seuraavien kompleksilukujen jokin napamuoto:

   (a) $z = \xi + 5\mathrm{i}$,
   (b) $z = 4 - 2\xi\mathrm{i}$,
   (c) $z = 6\xi - \xi\mathrm{i}$.

8. Olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Etsi seuraavien kompleksilukujen karteesinen muoto

   (a) $z = \xi \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$,
   (b) $z = \mathrm{e}^{\xi\pi\mathrm{i}}$,
   (c) $z = \xi^3 \mathrm{e}^{\xi 2\pi\mathrm{i}}$.

9. Matriisi $\mathbf{U}$ on ortogonaalinen, jos $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\top$.

   (a) Identiteettimatriisi $\mathbf{I}$ on ortogonaalinen, nollamatriisi $\mathbf{0}$ on ortogonaalinen ja kiertomatriisi
$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
   on ortogonaalinen. Anna jokin muu esimerkki ortogonaalisesta matriisista.

(b) Onko matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 42a & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonaalinen millään vakion a arvolla?

(c) Ortogonaalisuuden idea on se, että ortogonaalinen kuvaus ei muuta vektoreiden pituuksia eikä niiden välisiä kulmia. Miten tämän voi kirjoittaa matemaattisesti ja miten siitä päädytään määritelmään $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\top$?

10. Olkoot a ja b vapaita parametreja ja olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Etsi seuraavien matriisien ominaisarvohajotelmat

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \xi+2 \\ \xi+2 & 1 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\xi & a \\ a & \xi \end{bmatrix},$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & \xi-1 \\ \xi-1 & b \end{bmatrix}.$$

11. Matriisi $\mathbf{P}$ on projektio, jos $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Projektio $\mathbf{P}$ on ortoprojektio, jos lisäksi $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}$.

(a) Nollamatriisi $\mathbf{0}$ on ortoprojektio ja identiteettimatriisi $\mathbf{I}$ on ortoprojektio. Anna jokin muu esimerkki ortoprojektiosta.

(b) Anna esimerkki projektiosta, joka ei ole ortoprojektio.

(c) Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.50000 & 0.70711 \\ a & 0.70711 \end{bmatrix}.$$

Voidaanko a valita niin, että $\mathbf{A}$ on projektio?

12. Pisteen $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^\top$ etäisyys suorasta $\ell = \{t\mathbf{a} + \mathbf{b}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ on määritelmän nojalla

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \ell) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\,;\, \mathbf{y} \in \ell\}.$$

(a) Laske pisteen $\mathbf{x} = [1\ \ 2]^\top$ etäisyys suorasta $\ell = \{\ t[1\ \ 1]^\top - [0\ \ 1]^\top\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ joko piirtämällä, derivoimalla, laskemalla normaali, tai ihan vain katsomalla taulukkokirjasta.

(b) Mikä on kohdassa (a) se suoran ℓ piste, joka on lähinnä pistettä $\mathbf{x}$?

(c) Olkoon ℓ origon kautta kulkeva suora $\ell = \{t\mathbf{a}\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ ja $\mathbf{x}$ yleinen tason piste. Miten $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \ell)$ liittyy projektiokuvauksiin $\mathbf{P}$? Miten tilanne muuttuu, jos suora ℓ ei kulje origon kautta?

13. Mariisin $\mathbf{A}$ normi $\|\mathbf{A}\|$ on mikä tahansa operaatio, joka toteuttaa ehdot

(N1) $\|a\mathbf{A}\| = |a|\|\mathbf{A}\|$ kaikilla skalaareilla a ja matriiseilla $\mathbf{A}$.

(N2) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ kaikilla matriiseilla $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$.

(N3) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ kaikilla matriiseilla $\mathbf{A}$.

(N4) $\|\mathbf{A}\| = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{A}$ on $\mathbf{0}$-matriisi.

Matriisin $\mathbf{A}$ etäisyys matriisista $\mathbf{B}$ annetun normin suhteen on $\operatorname{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$.

(a) Matriisin $\mathbf{A}$ niin sanottu L^p-normi on

$$\|A\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p},$$

missä

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Osoita että $\|\mathbf{A}\|_p$ on normi. Toisin sanoen osoita että ehdot (N1)–(N4) pätevät otukselle $\|\mathbf{A}\|_p$.

(b) Matriisin $\mathbf{A}$ Hilbert–Schmidt -normi on sen alkoiden neliöiden summan neliöjuuri:

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} A_{ij}^2}.$$

Osoita että $\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{HS}}$ on normi. Toisin sanoen osoita että ehdot (N1)–(N4) pätevät otukselle $\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{HS}}$.

(c) Osoita että kaikki matriisit ovat “lähes kääntyviä” siinä mielessä, että jokaiselle matriisille $\mathbf{A}$ ja mille tahansa virhetoleranssille $\varepsilon > 0$ ja virhemittarille (eli normille) löytyy sellainen kääntyvä matriisi $\mathbf{B}$, että $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| < \varepsilon$.

14. (a) Asenna GNU Octave omalle koneellesi osoitteesta https://www.gnu.org/software/octave/download.html.

(b) Olkooon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Laske GNU Octavella matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & -\xi \\ 0 & 2\xi & 0 & 3 \\ 17 & 0 & 3\xi & 0 \\ -\xi & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ominaisarvohajotelma.

(c) Olkoon ξ opiskelijanumerosi viimeinen numero. Etsi GNU Octavella seuraavan yhtälöryhmän **kaikki** ratkaisut.

$$\begin{cases} 11x_1 - \xi x_2 + x_4 + x_6 + 9x_7 = \xi \\ x_2 - 3x_7 = 0 \\ 4x_1 + x_3 - 5x_4 = 21 \\ -7x_1 - 8x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ 13x_1 + 17x_2 + x_5 = 0 \\ -x_3 + 2x_6 = 19 \\ 5x_5 - 2x_7 = 2\xi \end{cases}$$

Liitä ratkaisuihisi (b) ja (c) kuvakaappaukset siitä, millaisia loitsuja luit GNU Octavelle.