1. (a)

$$\mathbf{x}+7\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

.

(b)

$$\mathbf{x}+7\mathbf{y}-\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(c) Koska $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ eivät ole yhdensuuntaisia, ne virittävät koko tason. Siten ko. skalaarit a ja b ovat olemassa.

2. (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\top - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^\top - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

.

(c)

$$\mathbf{B}^{-3}\mathbf{C}^{1973} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{1973} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}$$

Vastaus: $\mathbf{x} = [0.6 \;\; -0.4]^\top$ on ainoa ratkaisu.

(b) Selvästi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ratkaisu. Se on myös ainoa ratkaisu, sillä

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & a-\frac{1}{2} & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b/(a-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -b/(a-\frac{1}{2}) \\ 0 & 1 & b/(a-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b/(2a-1) \\ 0 & 1 & b/(a-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

Siispä, jos $a \neq \frac{1}{2}$, on ratkaisu $\mathbf{x} = [-b/(2a+1) \;\; b(a-\frac{1}{2})]^\top$. Jos taas $a = \frac{1}{2}$, niin

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Siten, jos $a = \frac{1}{2}$ ja $b \neq 0$, niin ratkaisuja ei ole. Jos taas $a = \frac{1}{2}$ ja $b = 0$, niin kaikki pisteet suoralla $2x_1 + x_2 = 0$ ovat ratkaisuja.

4. Huomaamme aluksi, että

$$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$$

(a)

$$z_1 + 3z_2 = -\mathrm{i} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)\mathrm{i}$$

(b)

$$z_1 z_2 = -\mathrm{i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

(c)

$$z_2/z_1^* = \frac{z_2 z_1^{**}}{|z_1|} = z_2 z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$$

Bonus. (a) Muoto $\mathbf{Q\Lambda Q}^\top$ on symmetrinen: $(\mathbf{Q\Lambda Q}^\top)^\top = \mathbf{Q\Lambda Q}^\top$.

(b) Esimerkiksi $\mathbf{Q\Lambda Q}^\top = (-\mathbf{Q})\mathbf{\Lambda}(-\mathbf{Q})^\top$.

(c) Vasemmalta jakaminen `x = A\b` ratkaisee yhtälön `A*x = b`. Se välttää käänteismatriisin `A^(-1)` laskemisen kaavassa `x = A^(-1)*b`.