

Laskimet kielletty.

1. (25 %) Olkoot $\mathbf{x} = [0 \ 1]^\top$, $\mathbf{y} = [-1 \ 2]^\top$ ja $\mathbf{z} = [1 \ 3]^\top$.

- (a) Laske $\mathbf{x} + 7\mathbf{y}$.
- (b) Laske $\mathbf{x} + 7\mathbf{y} - \mathbf{z}$.
- (c) Onko olemassa sellaisia skalaareja a ja b , että $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$?

2. (25 %) Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Laske $\mathbf{A}^\top - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{C}$.
- (b) Laske $\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{C}$.
- (c) Matriisin \mathbf{M} matriisipotenssi määritellään asettamalla $\mathbf{M}^2 = \mathbf{MM}$, $\mathbf{M}^3 = \mathbf{MMM}$, jne. Vastaavasti negatiivinen matriisipotenssi määritellään asettamalla $\mathbf{M}^{-2} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{M}^{-3} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ jne.

Laske $\mathbf{B}^{-3}\mathbf{C}^{1973}$.

3. (25 %) Etsi seuraavien yhtälöparien **kaikki** ratkaisut:

- (a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 2 \end{cases},$$
- (b)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases},$$
- (c)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + ax_2 = b \end{cases},$$

missä a ja b ovat “vapaita parametreja”.

4. (25 %) Olkoon $z_1 = -i$ ja $z_2 = e^{i\pi/4}$. Laske seuraavat kompleksiluvut ja esitä ne karteesisessa muodossa

- (a) $z_1 + 3z_2$,
- (b) z_1z_2 ,
- (c) z_2/z_1^* .

Bonus. (25 %)

- (a) Miksi ominaisarvohajotelma toimii ainoastaan symmetrisille matriiseille?
- (b) Ominaisarvohajotelma ei ole yksikäsitteinen. Perustele tämä.
- (c) GNU Octavessa on “vasemmalta jakaminen”. Mitä se tekee ja miksi?