

*Laskimet kielletty. Oppimateriaali kielletty. Taulukkokirjat kielletty.*

1. (25 %) Olkoot  $\mathbf{x} = [0 \ 1]^\top$ ,  $\mathbf{y} = [0 \ -2]^\top$  ja  $\mathbf{z} = [2 \ -3]^\top$ .

- (a) Laske  $16\mathbf{x} + 8\mathbf{y}$ .
- (b) Laske  $16\mathbf{x} + 8\mathbf{y} - 3\mathbf{z}$ .
- (c) Onko olemassa sellaisia skalaareja  $a$  ja  $b$ , että  $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ ?

2. (25 %) Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Laske  $2\mathbf{A}^\top - 6\mathbf{B} + \mathbf{C}$ .
- (b) Laske  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$ .
- (c) Matriisin  $\mathbf{M}$  matriisipotenssi määritellään asettamalla  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{M}$ , jne. Vastaavasti negatiivinen matriisipotenssi määritellään asettamalla  $\mathbf{M}^{-2} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{M}^{-3} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}^{-1}$  jne.

Laske  $\mathbf{B}^{-2}\mathbf{C}^{2022}$ .

3. (25 %) Etsi seuraavien yhtälöparien **kaikki** ratkaisut:

(a)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 8x_1 + x_2 = 2 \end{cases},$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 8x_1 + x_2 = 0 \end{cases},$$

(c)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2ax_2 = 2b \end{cases},$$

missä  $a$  ja  $b$  ovat "vapaita parametreja".

4. (25 %) Olkoon  $z_1 = -2i$  ja  $z_2 = e^{i\pi/4}$ . Laske seuraavat kompleksiluvut ja esitä ne karteesisessa muodossa

- (a)  $3z_1 + 2z_2$ ,
- (b)  $2z_1z_2$ ,
- (c)  $3z_2/z_1$ .

**Bonus.** (25 %)

- (a) Mikä on pistetulo ja miten se määrittelee vektorien väliset kulmat?
- (b) Mitä determinantti  $\det(\mathbf{A})$  kertoo yhtälön  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ratkaisusta?
- (c) GNU Octavessa on "vasemmalta jakaminen". Mitä se tekee ja miksi?