

H7t1, Exercise 7.5.

H7t2, Exercise 8.1.

H7t3, Exercise 9.1.

H7t4, Exercise 9.8.

H7t5

7.5. General Ford produces road-boats at L.A. and Detroit and has a warehouse in Atlanta. The customers are in Houston and Tampa. The costs of shipping a road-boat are in Dollars

| | City | | | | |
|---------|------|---------|---------|---------|-------|
| City | L.A. | Detroit | Atlanta | Houston | Tampa |
| L.A. | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 |
| Detroit | 145 | 0 | 111 | 110 | 119 |
| Atlanta | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 |
| Houston | 89 | 109 | 121 | 0 | – |
| Tampa | 210 | 117 | 82 | – | 0 |

In the above '–' means that shipping is not allowed. L.A. can produce 1;100 road-boats, and Detroit can produce 2 900 road-boats. Houston must receive 2 400 road-boats and Tampa must receive 1 500 road-boats. There is no limit in the Atlanta warehouse.

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

| | City | | | | |
|---------|------|---------|---------|---------|-------|
| City | L.A. | Detroit | Atlanta | Houston | Tampa |
| L.A. | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 |
| Detroit | 145 | 0 | 111 | 110 | 119 |
| Atlanta | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 |
| Houston | 89 | 109 | 121 | 0 | – |
| Tampa | 210 | 117 | 82 | – | 0 |

(a) Solve the General Ford's transshipment problem, i.e., find the transshipment schedule with the minimum cost.

(b) General Ford's grandfather Major Nepotist is a senator who can make the transportation between Houston and Tampa cost 10 Dollars both ways. How much should General Ford pay for his grandfather to make the transportation between Houston and Tampa possible?

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

7.5 (a) Pohdintaa:

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

7.5 (a) Pohdintaa:

- ▶ Kuljetustehtävä ei ole tasapainossa. (Tarjonta on $1,100 + 2,900 = 4,000$ ja kysyntä on $2,400 + 1,500 = 3,900$.) Lisäämme siksi Dump-kohteen, jonka sysyntä on 100.

7.5 (a) Pohdintaa:

- ▶ Kuljetustehtävä ei ole tasapainossa. (Tarjonta on $1,100 + 2,900 = 4,000$ ja kysyntä on $2,400 + 1,500 = 3,900$.) Lisäämme siksi Dump-kohteen, jonka sysyntä on 100.
- ▶ Ainoat reitit, jotka on kielletty ovat Houston–Tampa ja Tampa–Houston. Kaikkia muita reittejä saa käyttää.

7.5 (a) Pohdintaa:

- ▶ Kuljetustehtävä ei ole tasapainossa. (Tarjonta on $1,100 + 2,900 = 4,000$ ja kysyntä on $2,400 + 1,500 = 3,900$.) Lisäämme siksi Dump-kohteen, jonka sysyntä on 100.
- ▶ Ainoat reitit, jotka on kielletty ovat Houston–Tampa ja Tampa–Houston. Kaikkia muita reittejä saa käyttää.
- ▶ L.A. on lähde ja sen tarjonta on 1,100 ja kysyntä 0.

7.5 (a) Pohdintaa:

- ▶ Kuljetustehtävä ei ole tasapainossa. (Tarjonta on $1,100 + 2,900 = 4,000$ ja kysyntä on $2,400 + 1,500 = 3,900$.) Lisäämme siksi Dump-kohteen, jonka sysyntä on 100.
- ▶ Ainoat reitit, jotka on kielletty ovat Houston–Tampa ja Tampa–Houston. Kaikkia muita reittejä saa käyttää.
- ▶ L.A. on lähde ja sen tarjonta on 1,100 ja kysyntä 0.
- ▶ Varaudumme siihen, että koko Detroitin tuotanto kuljetetaan L.A.:n kautta. Siksi asetamme L.A.:n tarjonnaksi 4,000 ja kysynnäksi 2,900 (4,000 on maksimi läpivirtaus ja erotus $4,000 - 2,900 = 1,100$ L.A.:n oma tarjonta)

- ▶ Detroit on lähde ja sen tarjonta on 2,900 ja kysyntä 0.

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

- ▶ Detroit on lähde ja sen tarjonta on 2,900 ja kysyntä 0.
- ▶ Varaudumme siihen, että koko L.A.:n tuotanto kuljetetaan Detroitin kautta. Siksi asetamme Detroitin tarjonnaksi 4,000 ja kysynnäksi 1,100 (4,000 on maksimi läpivirtaus ja erotus $4,000 - 1,100 = 2,900$ Detroitin oma tarjonta)

- ▶ Detroit on lähde ja sen tarjonta on 2,900 ja kysyntä 0.
- ▶ Varaudumme siihen, että koko L.A.:n tuotanto kuljetetaan Detroitin kautta. Siksi asetamme Detroitin tarjonnaksi 4,000 ja kysynnäksi 1,100 (4,000 on maksimi läpivirtaus ja erotus $4,000 - 1,100 = 2,900$ Detroitin oma tarjonta)
- ▶ Atlanta on kauttakuljetuskohde ja sen kapasiteetti on rajaton. Asetamme Atlantan tarjonnaksi ja kysynnäksi 4,000. Periaatteessa kaikki tuotanto voidaan kuljettaa Atlantan kautta.

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

- ▶ Houston on kohde, josta (a)-kohdassa ei voi toimittaa tavaraa Tampaan. Se ei siis ole (a)-kohdassa kauttakuljetus kohde. (b)-kohdassa tilanne muuttuu, joten rakennamme mallin jo nyt niin, että kauttakuljetus on mahdollista, jos se on kannattavaa. (a)-kohdassa kielletyt väylät suljetaan nostamalla yksikkökustannukset suuriksi. Houstonin tarjonta 1,500 ja kysyntä 3,900. (1,500 on maksimi läpivirtaus ja erotus $3,900 - 1,500 = 2,400$ on oma kysyntä.

- ▶ Houston on kohde, josta (a)-kohdassa ei voi toimittaa tavaraa Tampaan. Se ei siis ole (a)-kohdassa kauttakuljetus kohde. (b)-kohdassa tilanne muuttuu, joten rakennamme mallin jo nyt niin, että kauttakuljetus on mahdollista, jos se on kannattavaa. (a)-kohdassa kielletyt väylät suljetaan nostamalla yksikkökustannukset suuriksi.
Houstonin tarjonta 1,500 ja kysyntä 3,900. (1,500 on maksimi läpivirtaus ja erotus $3,900 - 1,500 = 2,400$ on oma kysyntä.
- ▶ Tampa on kohde, jonka tarjonta on 2,400 ja kysyntä on 3,900. (2,400 on maksimi läpivirtaus ja erotus $3,900 - 2,400 = 1,500$ on oma kysyntä.

| | LA | D | A | H | T | Dump | Tar |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| LA | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 | 0 | 4,000 |
| D | 145 | 0 | 111 | 110 | 118 | 0 | 4,000 |
| A | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 | 0 | 4,000 |
| H | 89 | 109 | 121 | 0 | 1000 | 0 | 1,500 |
| T | 210 | 117 | 82 | 1000 | 0 | 0 | 2,400 |
| Kys | 2,900 | 1,100 | 4,000 | 3,900 | 3,900 | 100 | |

| | LA | D | A | H | T | Dump | Tar |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| LA | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 | 0 | 4,000 |
| D | 145 | 0 | 111 | 110 | 118 | 0 | 4,000 |
| A | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 | 0 | 4,000 |
| H | 89 | 109 | 121 | 0 | 1000 | 0 | 1,500 |
| T | 210 | 117 | 82 | 1000 | 0 | 0 | 2,400 |
| Kys | 2,900 | 1,100 | 4,000 | 3,900 | 3,900 | 100 | |

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 140 & 100 & 90 & 225 & 0 \\ 145 & 0 & 111 & 110 & 118 & 0 \\ 105 & 115 & 0 & 113 & 78 & 0 \\ 89 & 109 & 121 & 0 & 1000 & 0 \\ 210 & 117 & 82 & 1000 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 4,000 \\ 4,000 \\ 4,000 \\ 1,500 \\ 2,400 \end{pmatrix}$$

$$b = (2,900 \quad 1,100 \quad 4,000 \quad 3,900 \quad 3,900 \quad 100)^T$$

```
C = [ 0 140 100 90 225 0;
      145 0 111 110 118 0;
      105 115 0 113 78 0;
      89 109 121 0 1000 0;
      210 117 82 1000 0 0];
s = [4000 4000 4000 1500 2400]';
d = [2900 1100 4000 3900 3900 100]';
[cost,schedule] = trans_solver(C,s,d)
#####
# cost = 419000
# schedule =
#
# 2900      0      0  1100      0      0
#      0  1100      0  1300  1500  100
#      0      0  4000      0      0      0
#      0      0      0  1500      0      0
#      0      0      0      0  2400      0
```

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

```

# cost = 419000
# schedule =
#
# 2900      0      0      1100      0      0
#      0      1100      0      1300      1500      100
#      0      0      4000      0      0      0
#      0      0      0      1500      0      0
#      0      0      0      0      2400      0

```

Tulkinta: TODELLISET KULJETUSMÄÄRÄT:

| | LA | D | A | H | T | Dump | Tar |
|-----|----|---|---|-------|-------|------|-------|
| LA | 0 | 0 | 0 | 1100 | 0 | 0 | 1,100 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1300 | 1500 | 100 | 2,900 |
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| T | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Kys | 0 | 0 | 0 | 2,400 | 1,500 | 100 | |

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

Muutetaan kuljetusongelma muotoon, jossa reitit Houston–Tampa ja Tampa–Houston ovat mahdollisia ja kuljetuskustannukset ovat 10.

| | LA | D | A | H | T | Dump | Tar |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| LA | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 | 0 | 4,000 |
| D | 145 | 0 | 111 | 110 | 118 | 0 | 4,000 |
| A | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 | 0 | 4,000 |
| H | 89 | 109 | 121 | 0 | 10 | 0 | 1,500 |
| T | 210 | 117 | 82 | 10 | 0 | 0 | 2,400 |
| Kys | 2,900 | 1,100 | 4,000 | 3,900 | 3,900 | 100 | |

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

Muutetaan kuljetusongelma muotoon, jossa reitit Houston–Tampa ja Tampa–Houston ovat mahdollisia ja kuljetuskustannukset ovat 10.

| | LA | D | A | H | T | Dump | Tar |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| LA | 0 | 140 | 100 | 90 | 225 | 0 | 4,000 |
| D | 145 | 0 | 111 | 110 | 118 | 0 | 4,000 |
| A | 105 | 115 | 0 | 113 | 78 | 0 | 4,000 |
| H | 89 | 109 | 121 | 0 | 10 | 0 | 1,500 |
| T | 210 | 117 | 82 | 10 | 0 | 0 | 2,400 |
| Kys | 2,900 | 1,100 | 4,000 | 3,900 | 3,900 | 100 | |

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 140 & 100 & 90 & 225 & 0 \\ 145 & 0 & 111 & 110 & 118 & 0 \\ 105 & 115 & 0 & 113 & 78 & 0 \\ 89 & 109 & 121 & 0 & 10 & 0 \\ 210 & 117 & 82 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 4,000 \\ 4,000 \\ 4,000 \\ 1,500 \\ 2,400 \end{pmatrix}$$

$$b = (2,900 \quad 1,100 \quad 4,000 \quad 3,900 \quad 3,900 \quad 100)^T$$

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

```
C = [ 0 140 100 90 225 0;
      145 0 111 110 118 0;
      105 115 0 113 78 0;
      89 109 121 0 10 0;
      210 117 82 10 0 0];
s = [4000 4000 4000 1500 2400]';
d = [2900 1100 4000 3900 3900 100]';
[cost,schedule] = trans_solver(C,s,d)
#####
# cost = 419000
# schedule =
#
# 2900 0 0 1100 0 0
# 0 1100 0 1300 1500 100
# 0 0 4000 0 0 0
# 0 0 0 1500 0 0
# 0 0 0 0 2400 0
```

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

```

C = [ 0 140 100 90 225 0;
      145 0 111 110 118 0;
      105 115 0 113 78 0;
      89 109 121 0 10 0;
      210 117 82 10 0 0];
s = [4000 4000 4000 1500 2400]';
d = [2900 1100 4000 3900 3900 100]';
[cost,schedule] = trans_solver(C,s,d)
#####
# cost = 419000
# schedule =
#
# 2900 0 0 1100 0 0
# 0 1100 0 1300 1500 100
# 0 0 4000 0 0 0
# 0 0 0 1500 0 0
# 0 0 0 0 2400 0

```

RATKAISU EI MUUTTUNUT. Majuri Nepotistille ei kannata maksaa mitään!

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

8.1. Solve the optimization problems (8.1.1), (8.1.2), and (8.1.3) and their corresponding LP relaxations

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

8.1. Solve the optimization problems (8.1.1), (8.1.2), and (8.1.3) and their corresponding LP relaxations

$$\begin{aligned}
 (8.1.1) \quad & \max z = 3x_1 + 2x_2 \\
 & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ integer}
 \end{aligned}$$

IP-Malli

$c = [3 \ 2]'$;

$A = [1 \ 1]$;

$b = [6]$;

$[x \ z] = \text{glpk}(c, A, b, [0, 0], [], "U", "II", -1)$

#####

x =

6

0

#

z = 18

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

$$\begin{aligned}
 (8.1.1) \quad & \max z = 3x_1 + 2x_2 \\
 & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ integer}
 \end{aligned}$$

LP-relaksaatio:

```
c = [3 2]';
```

```
A = [1 1];
```

```
b = [6];
```

```
[x z] = glpk(c,A,b,[0,0],[],"U","CC",-1)
```

```
#####
```

```
# x =
```

```
# 6
```

```
# 0
```

```
#
```

```
# z = 18
```

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

$$\begin{aligned}
 \text{(8.1.2)} \quad \max z &= 3.2x_1 + 2.4x_2 + 1.5x_3 \\
 \text{s.t.} \quad &0.1x_1 + 0.9x_2 - 0.5x_3 \leq 2.5 \\
 &\quad \quad \quad - 1.7x_2 + 9.5x_3 \geq 1.5 \\
 &\quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ or } 1.
 \end{aligned}$$

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

IP-Malli

```
c = [3.2 2.4 1.5]';
```

```
A = [0.1 0.9 -0.5;
      0.0 -1.7 9.5];
```

```
b = [2.5 1.5]';
```

```
[x z] = glpk(c,A,b,[0,0,0],[1,1,1],"UL","III",-1)
```

```
#####
```

```
# x =
```

```
# 1
```

```
# 1
```

```
# 1
```

```
# z = 7.1000
```

$$\begin{aligned}
 (8.1.2) \quad \max z &= 3.2x_1 + 2.4x_2 + 1.5x_3 \\
 \text{s.t.} \quad &0.1x_1 + 0.9x_2 - 0.5x_3 \leq 2.5 \\
 &\quad \quad - 1.7x_2 + 9.5x_3 \geq 1.5 \\
 &\quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ or } 1.
 \end{aligned}$$

LP-relaksaatioi

$c = [3.2 \ 2.4 \ 1.5]'$;

$A = [0.1 \ 0.9 \ -0.5;$
 $\quad \quad 0.0 \ -1.7 \ 9.5];$

$b = [2.5 \ 1.5]'$;

$[x \ z] = \text{glpk}(c, A, b, [0, 0, 0], [], "UL", "CCC", -1)$

#####

x =

NA

NA

NA

z = NA

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

$$\begin{aligned}
 (8.1.3) \quad & \max z = 3x_1 + 2x_2 \\
 & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, x_1 \text{ integer.}
 \end{aligned}$$

IP-Malli

```

c = [3 2]';
A = [1 1];
b = [6];
[x z] = glpk(c,A,b,[0,0],[],"U","IC",-1)
#####
# x =
#   6
#   0
#
# z = 18

```

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

$$\begin{aligned}
 (8.1.3) \quad & \max z = 3x_1 + 2x_2 \\
 & \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, x_1 \text{ integer.}
 \end{aligned}$$

LP-relaksaatio

```

c = [3 2]';
A = [1 1];
b = [6];
[x z] = glpk(c,A,b,[0,0],[],"U","CC",-1)
#####
# x =
#   6
#   0
#
# z = 18

```

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

9.1. Mr. Kulukumulukku is a traveling salesman selling kalakukkos. Each week he travels to the five biggest cities of Finland to sell his kalakukkos. Mr. Kulukumulukku wants to minimize his total traveling distance. What is his optimal tour, when

- (a) he just wants to make the tour,
- (b) he starts and ends his tour from his home town of Kuopio?

(If you don't know the five biggest cities of Finland or their distances to each others and to Kuopio, you might want to consult Google.)

9.1.(a) Kaupungit ovat: Helsinki, Tampere, Turku, Oulu ja Jyväskylä. Niiden etäisyydet ovat

| | He | Ta | Tu | Ou | Jy |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| He | 0 | 178 | 165 | 608 | 270 |
| Ta | 178 | 0 | 163 | 488 | 148 |
| Tu | 165 | 163 | 0 | 647 | 308 |
| Ou | 608 | 488 | 647 | 0 | 339 |
| Jy | 270 | 148 | 308 | 339 | 0 |

Koodi h7t3a.m antaa ratkaisun

(He > Tu > Ta > Jy > Ou > He), cost = 1423

| | He | Ta | Tu | Ou | Jy |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| He | 0 | 178 | 165 | 608 | 270 |
| Ta | 178 | 0 | 163 | 488 | 148 |
| Tu | 165 | 163 | 0 | 647 | 308 |
| Ou | 608 | 488 | 647 | 0 | 339 |
| Jy | 270 | 148 | 308 | 339 | 0 |

9.1.(b) Kaupungit ovat: Kuopio, Helsinki, Tampere, Turku, Oulu ja Jyväskylä. Niiden etäisyydet ovat

| | Ku | He | Ta | Tu | Ou | Jy |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ku | 0 | 391 | 294 | 454 | 287 | 146 |
| He | 391 | 0 | 178 | 165 | 608 | 270 |
| Ta | 294 | 178 | 0 | 163 | 488 | 148 |
| Tu | 454 | 165 | 163 | 0 | 647 | 308 |
| Ou | 287 | 608 | 488 | 647 | 0 | 339 |
| Jy | 146 | 270 | 148 | 308 | 339 | 0 |

Koodi h7t3b.m antaa ratkaisun

(Ku > Ou > Jy > Ta > Tu > He > Ku), cost = 1493

| | Ku | He | Ta | Tu | Ou | Jy |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ku | 0 | 391 | 294 | 454 | 287 | 146 |
| He | 391 | 0 | 178 | 165 | 608 | 270 |
| Ta | 294 | 178 | 0 | 163 | 488 | 148 |
| Tu | 454 | 165 | 163 | 0 | 647 | 308 |
| Ou | 287 | 608 | 488 | 647 | 0 | 339 |
| Jy | 146 | 270 | 148 | 308 | 339 | 0 |

sisältö

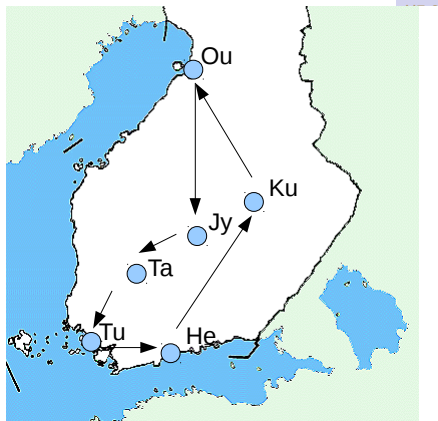
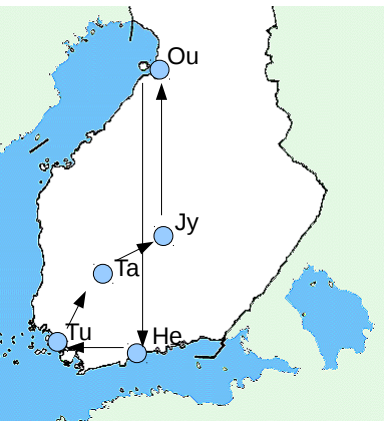
H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5



9.8. The Holy Emperor is waging a desperate war against The Supreme Sultan. The count of Brutopia, who is a vassal of The Holy Emperor, fathoms that the war will be lost in exactly 3 years, and after the war there will be no county, nor count, of Brutopia. So, the count decides to capitalize his possessions. After the capitalization, the count intends to disappear into the New World. The count's income comes from the 6 villages under his yoke. The average monthly income of the villages are (in Holy Imperial Ducats):

| | | | | | | |
|---------|---|----|----|----|----|-----|
| Village | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Taxes | 8 | 19 | 18 | 18 | 19 | 102 |

To collect the taxes, the count must hire imperial tax-collectors. The imperial tax-collectors are placed in the villages and their salary is 2 Holy Imperial Ducats per week. The time it takes for a tax-collector based in the village i to collect the taxes from the village j , and then to deliver them to the count are (in days):

| Tax-col village | Taxed village | | | | | | Delivery |
|--------------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 0 | 100 | 100 | 107 | 101 | 192 | 12 |
| 2 | 100 | 0 | 128 | 135 | 197 | 197 | 71 |
| 3 | 100 | 128 | 0 | 115 | 130 | 189 | 87 |
| 4 | 107 | 135 | 115 | 0 | 192 | 185 | 88 |
| 5 | 101 | 197 | 130 | 192 | 0 | 184 | 89 |
| 6 | 192 | 197 | 189 | 185 | 184 | 0 | 97 |

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

| Tax-col village | Taxed village | | | | | | Delivery |
|--------------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 0 | 100 | 100 | 107 | 101 | 192 | 12 |
| 2 | 100 | 0 | 128 | 135 | 197 | 197 | 71 |
| 3 | 100 | 128 | 0 | 115 | 130 | 189 | 87 |
| 4 | 107 | 135 | 115 | 0 | 192 | 185 | 88 |
| 5 | 101 | 197 | 130 | 192 | 0 | 184 | 89 |
| 6 | 192 | 197 | 189 | 185 | 184 | 0 | 97 |
| Tax | 8 | 19 | 18 | 18 | 19 | 102 | |

Now, the Holy Emperor finances his war by diluting the gold content of the Holy Roman Ducats by 1% each day. How much should The Supreme Sultan offer to the count of Brutopia to disappear immediately?

Tehtävästä ei täysin selviä, millaisin säännöin veronkerääjät toimivat.

Siksi teemme ensin yksinkertaistavia oletuksia, joiden ollessa voimassa tehtävä helpottuu. Kun helppo tehtävä on saatu ratkaistua, tarkastelemme ratkaisua kriittisesti. Kritiikki pakottaa muuttamaan oletuksia, jolloin saamme uuden ongelman ja sille ratkaisun.

Muutaman kierroksen jälkeen kerromme päätelmämme Sulttaanille.

(Versio 1) Oletuksia ja yksinkertaistuksia:

- ▶ Emme huomioi rahan arvon laskemista.
- ▶ Joka kylässä on oma veron kerääjä.
- ▶ Kerralla kerätään vuoden verot ja tässä ei ole ongelmia.
- ▶ kaikki kolme vuotta tuottavat samalla tavalla.

Tuotot ovat

$$R = 3 \cdot 12 \cdot (8 + 19 + 18 + 18 + 19 + 102) = 36 \cdot 184 = 6624.$$

Kustannukset ovat

$$C = 6 \cdot 3 \cdot 52 \cdot 2 = 1872.$$

Kreiville jää silloin $6624 - 1872 = 4752$ tukaattia.

(Versio 1) kommentteja:

- ▶ Kylän 1 verottaminen ei tuota voittoa. Kylän jättäminen verottamatta, antaisi vaarallisen signaalin hallinnon heikkoudesta. Siksi myös kylää 1 verotetaan.
- ▶ Kreivin on mahdollista parantaa voittoa, tehostamalla veronkerääjien toimintaa.
- ▶ Etsitään seuraavaksi ratkaisua, jossa veronkerääjiä on vähemmän.

(Versio 2) Oletuksia ja yksinkertaistuksia:

- ▶ Emme huomioi rahan arvon laskemista.
- ▶ Yksi veronkerääjä kerää verot yhdestä tai useammasta kylästä. Veronkerääjän alue pitää olla sellainen, että hän ehtii vuodessa käydä alueensa läpi ja tilittää tuotot. Kaksi veronkerääjää ei asu samassa kylässä. (Melko ilmeistä, mutta vaatisi kuitenkin perustelun! Jätämme nyt myöhempään.)
- ▶ Kylän verot kerätään kerran vuodessa ja tässä ei ole ongelmia.
- ▶ kaikki kolme vuotta tuottavat samalla tavalla.

(Versio 2) Oletuksia ja yksinkertaistuksia:

- ▶ Emme huomioi rahan arvon laskemista.
- ▶ Yksi veronkerääjä kerää verot yhdestä tai useammasta kylästä. Veronkerääjän alue pitää olla sellainen, että hän ehtii vuodessa käydä alueensa läpi ja tilittää tuotot. Kaksi veronkerääjää ei asu samassa kylässä. (Melko ilmeistä, mutta vaatisi kuitenkin perustelun! Jätämme nyt myöhempään.)
- ▶ Kylän verot kerätään kerran vuodessa ja tässä ei ole ongelmia.
- ▶ kaikki kolme vuotta tuottavat samalla tavalla.

(Versio 2) Malli:

Olkoon $X_{ij} = 1$, jos kylässä i asuva veronkerääjä kerää verot kylästä j .

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

(Versio 2) Malli:

Olkoon $X_{ij} = 1$, jos kylässä i asuva veronkerääjä kerää verot kylästä j .

C_{ij} = aika, joka kuluu verojen keräämiseen, kun kylässä i asuva kerääjä kerää verot kylästä j .

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

(Versio 2) Malli:

Olkoon $X_{ij} = 1$, jos kylässä i asuva veronkerääjä kerää verot kylästä j .

C_{ij} = aika, joka kuluu verojen keräämiseen, kun kylässä i asuva kerääjä kerää verot kylästä j .

d_i = aika, joka kuluu, kun kylässä i asuva kerääjä toimittaa verot kreiville.

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

(Versio 2) Malli:

Olkoon $X_{ij} = 1$, jos kylässä i asuva veronkerääjä kerää verot kylästä j .

C_{ij} = aika, joka kuluu verojen keräämiseen, kun kylässä i asuva kerääjä kerää verot kylästä j .

d_i = aika, joka kuluu, kun kylässä i asuva kerääjä toimittaa verot kreiville.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min } z = & \sum_i X_{ii} & & \\
 \text{s.t.} & \sum_i X_{ij} = & 1, & \text{kaikille } j \\
 & \sum_j C_{ij} X_{ij} \leq & 365 - d_i, & \text{kaikille } i \\
 & -7X_{ii} + \sum_{j \neq i} X_{ij} \leq & 0 & \text{kaikille } i \\
 & X_{ij} = & 0 \text{ tai } 1, & \text{kaikille } i, j
 \end{array}$$

(Versio 2) Malli:

Olkoon $X_{ij} = 1$, jos kylässä i asuva veronkerääjä kerää verot kylästä j .

C_{ij} = aika, joka kuluu verojen keräämiseen, kun kylässä i asuva kerääjä kerää verot kylästä j .

d_i = aika, joka kuluu, kun kylässä i asuva kerääjä toimittaa verot kreiville.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } z = & \sum_i X_{ii} \\
 \text{s.t.} & \sum_i X_{ij} = 1, \text{ kaikille } j \\
 & \sum_j C_{ij} X_{ij} \leq 365 - d_i, \text{ kaikille } i \\
 & -7X_{ii} + \sum_{j \neq i} X_{ij} \leq 0 \text{ kaikille } i \\
 & X_{ij} = 0 \text{ tai } 1, \text{ kaikille } i, j
 \end{array}$$

Ratkaisu: Kylässä 1 asuva veronkerääjä verottaa kylät 1,5 ja 6. Kylässä 2 asuva veronkerääjä verottaa kylät 2,3 ja 4.

(Versio 2) kommentteja:

- ▶ Ratkaisuja on muitakin, mutta oleellista on, että veron kerääjiä tarvitaan enintään kaksi, joten kreivin on mahdollista saada nettotulos

$$R - C = 6624 - 2 \cdot 3 \cdot 52 \cdot 2 = 6624 - 624 = 6000 \text{ tukaattia.}$$

- ▶ Otetaan seuraavaksi huomioon rahan arvon pieneneminen. Kullan määrä tukaatissa pienenee 1% päivässä, joten kultan määrä tukaatissa on vuoden kuluttua

$$0.99^{365} \cdot 100\% = 2.551\%$$

alkuperäisestä. Sodan kuluessa tukaatti menettää siis kokonaan arvonsa.

- ▶ Kreivin kannattaa kerätä verot nopeasti.

(Versio 3) Oletuksia ja yksinkertaistuksia:

- ▶ Otamme huomioon rahan arvon laskemisen.
Kuukaudessa tukaatin arvo heikkenee tekijällä

$$q = 0.99^{30} = 0.7397$$

- ▶ Yksi veronkerääja kerää oman kylänsä verot.
- ▶ Kylän verot kerätään kerran kuussa ja tässä ei ole ongelmia.
- ▶ Verot tilitetään kreiville kerran vuodessa ja veronkerääjät ottavat palkkarahoikseen alkuvuoden tukaatteja (eniten kultaa sisältävät rahat).

(Versio 3):

Kylän 1 verotulot menevät kokonaan kerääjän palkaksi.

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

(Versio 3):

Kylän 1 verotulot menevät kokonaan kerääjän palkaksi.

Kylän 2 veronkerääjä ottaa palkkseen (104 tuk) viiden ensimmäisen kuukauden kertymän ja vielä 9 tukaattia kesäkuulta Kreiville jää 124 tukaattia, joiden sisältämän kullan arvo puhtaina tukaatteina mitattuna on

$$q^6 \cdot 10 + \sum_{j=7}^{12} q^j \cdot 19 = 9,03\text{tuk.}$$

Näin laskien kreivi saa ensimmäisen vuoden tuloista 238,93 tukaattia! Kolmen vuoden kertymä on

$$(1 + 0.02551 + 0.02551^2) \cdot 238,93 = 245,18 \text{ tukaattia}$$

sisältö

H7t1

H7t2

H7t3

H7t4

H7t5

(Versio 3) kommentteja:

- ▶ Ongelmana on nyt tulojen liian hidaskerääminen. Veronkerääjien tulee tilittää tuotot useita kertoja vuodessa.

(Versio 4) Oletuksia ja yksinkertaistuksia:

- ▶ Otamme huomioon rahan arvon laskemisen. Kolmessa kuukaudessa tukaatin arvo heikkenee tekijällä q^3 ja neljässä kuukaudessa tekijällä q^4

$$q^3 = q^3 = (0.99^{30}) = 0.4047, \quad q^4 = q^4 = 0.2994$$

- ▶ Kylän 2-5 veronkerääjä kerää oman kylänsä verot kolmen kuukauden välein ja tilittää tuotot kreiville neljästi vuodessa.
- ▶ kylän 6 veronkerääjä kerää verot neljän kuukauden välein ja tilittää tuotot kreiville kolme kertaa vuodessa.
- ▶ Verojen keräämisessä ei ole ongelmia. Kreivi maksaa palkan veronkerääjille tilityksen yhteydessä käyttäen silloista tukaattia.

(Versio 4):

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^{12} q3^j (3 \cdot (19 + 18 + 18 + 19 - 4 \cdot 8)) + \sum_{j=1}^9 q4^j (4 \cdot (102 - 8)) \\ &= 246,33 \text{ tukaattia} \end{aligned}$$

(Versio 4):

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=1}^{12} q3^j(3 \cdot (19 + 18 + 18 + 19 - 4 \cdot 8)) + \sum_{j=1}^9 q4^j(4 \cdot (102 - 8)) \\ &= 246,33 \text{ tukaattia} \end{aligned}$$

VATSAUS SULTTAANILLE:

- ▶ Jos kreivi ei pysty ryöstämään kyliä, niin 300 tukaattia riittänee.

H7.t5. Some typos are corrected from the Lecture Notes. Some typos or even serious mistakes are still probably left. Find at least one.