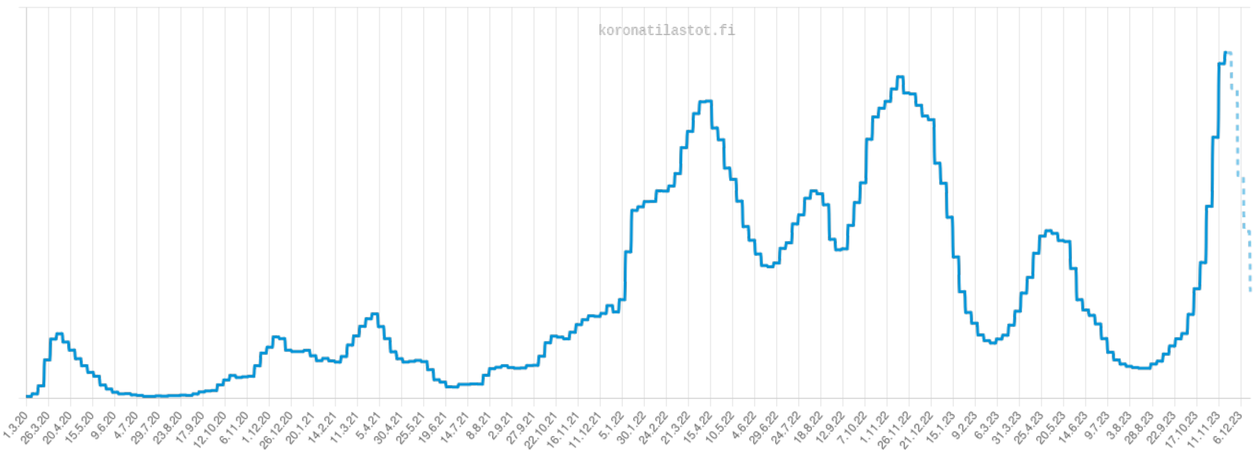
Päätöksentekoa Oliopolion aikaan

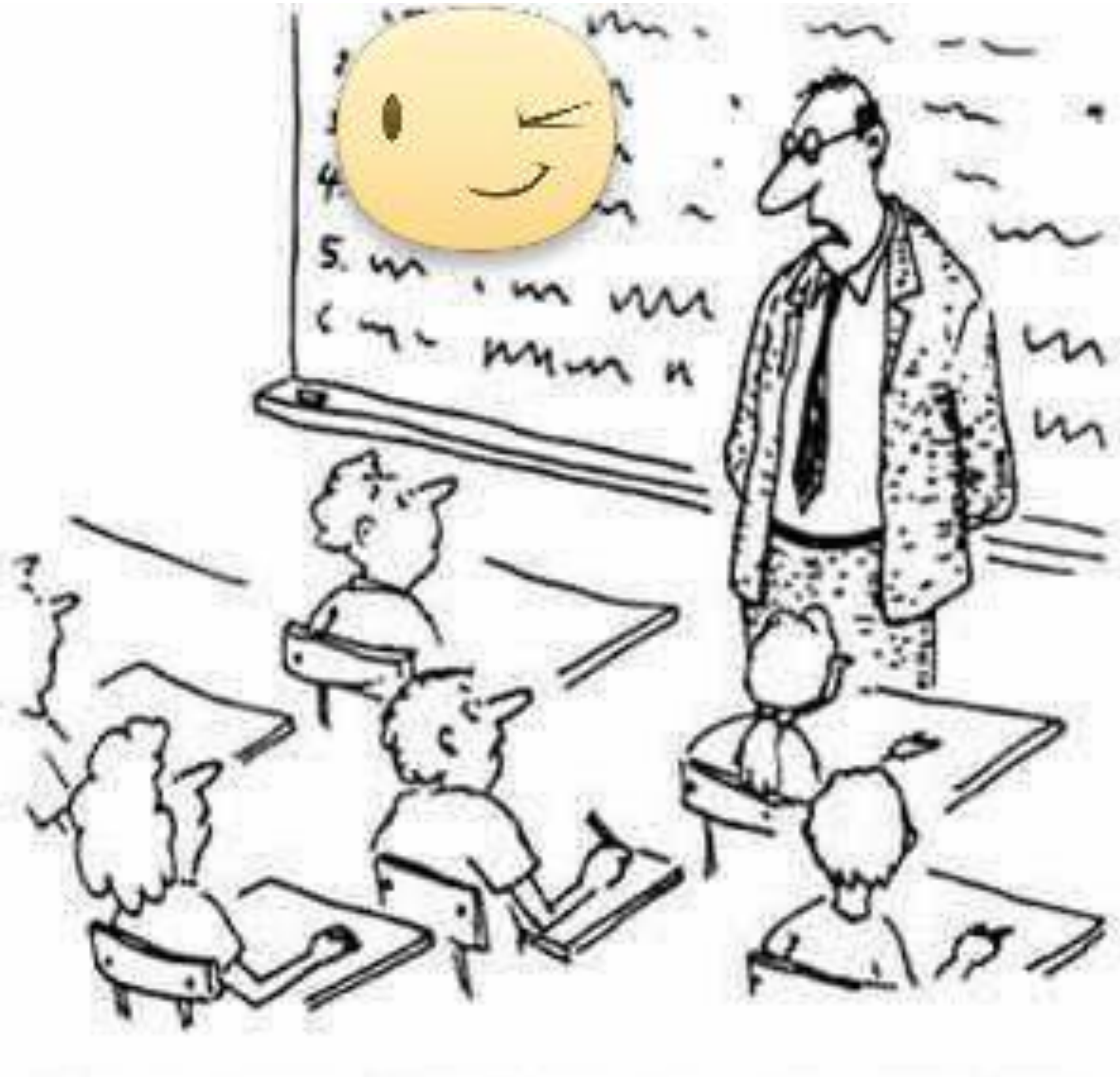


Sairaalahoidossa koronan takia 1.3.2020–6.12.2023 (lähde THL ja www.koronatilastot.fi).

Tommi Sottinen
tommi.sottinen@uwasa.fi
https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/ptoa.pdf

20. elokuuta 2024
(Alkuperäinen kirjanen *Päätöksentekoa koronan aikaan* 28. lokakuuta 2021)

Johdanto



"I expect you all to be independent, innovative, critical thinkers who will do exactly as I say!"

Tervetuloa kurssille **ORMS2020 Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa**! Vuosina 2020–2021 tämä kurssi järjestettiin ajankohtaisesti "koronakurssina". Nyt kurssi järjestetään olennaisesti samalla tavalla kuin vuosina 2020–2021. Kurssimateriaali on olennaisesti vuodelta 2020. Harjoitustyöt liittyvät nyt kuvitteelliseen virustautiin nimeltä Oliopolio koronan sijasta. Muuten harjoitustyöt ovat olennaisesti samat kuin vuosina 2020–2021.

Kurssi suoritetaan harjoitustöillä. Loppukoetta ei ole, viikottaisia harjoituksia ei ole, mitään läsnäolopakkoa ei ole. Viikottain on ohjausryhmiä, joissa opastetaan harjoitustöiden tekemistä. Niihin ei ole pakko osallistua, mutta suotavaa se on.

Kurssilla käytetään GNU Octave -ohjelmistoa. Tätä kirjoitettaessa 20. elokuuta 2024 viimein versio ohjelmistosta on 9.2.0, mutta vanhemmatkin versiot toiminevat. Lisäksi kurssin ohjelmat on kirjoitettu niin, että niiden pitäisi toimia myös Matlab-ohjelmistolla, jos joku haluaa käyttää sitä GNU Octaven sijasta.

Huomautus GNU Octaven joidenkin versioiden Windows-asennuksen PDF-ajuri ei toimi. Tallenna kuvasi esimerkiksi jpg-muodossa.

Opetusvideoita

Vuoden 2020 opetusvideot ovat edelleen kuranttia kamaa, vaikkakin tätä luentomonistetta ja m-tiedostoja onkin jonkin verran muutettu. Linkit opetusvideoihin löydät alta tai kurssin Moodle-sivulta.

Osa I Johdattelevia esimerkkejä

Luku 1 Reija Reippaan säävarusteet

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L01E01.mp4 (25 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L01E02.mp4 (28 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L01E03.mp4 (23 min)

Luku 2 Yrjö Yhtä-Reippaan synkronoidut säävarusteet

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L02E01.mp4 (19 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L02E02.mp4 (15 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/fi/L02E03.mp4 (11 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L02E04.mp4 (27 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L02E05.mp4 (12 min)

Osa II Päätösmatriisitekniikkaa

Luku 3 Päätösmatriisit ja päätössäännöt

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L03E01.mp4 (21 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L03E02.mp4 (32 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L03E03.mp4 (43 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L03E04.mp4 (22 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L03E05.mp4 (31 min)

Luku 4 Päätösmatriisilaskentaa GNU Octavella

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L04E01.mp4 (10 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L04E02.mp4 (46 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L04E03.mp4 (33 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L04E04.mp4 (35 min)

Osa III Esimerkkejä harjoitustöiden pohjaksi

Luku 5 Stefan Stuidun syksy 2021

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L05E01.mp4 (40 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L05E02.mp4 (25 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L05E03.mp4 (28 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L05E04.mp4 (39 min)

Luku 6 Eeva Evan tieteellinen selonteko

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L06E01.mp4 (13 min)

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L06E02.mp4 (17 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L06E03.mp4 (27 min)
- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L06E04.mp4 (9 min)

Luku 8 THL:n selvitys Päivi Pääministerille; Tekninen huomautus: **Bayesin kaava**

- https://lipas.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/L08E01.mp4 (35 min)

Sisällys

Osa I

Johdattelevia esimerkkejä

Luku 1

Reija Reippaan säävarusteet

Ongelman kuvaus

Reija Reipas hyötykävelee työpaikalle ja takaisin joka päivä. Matka on suuntaansa 10 km. Reijan on päätettävä millaisin varustein hän lähtee aamulla töihin. Menomatka ei ole ongelma, sillä sään näkee heti. Paluumatka työpäivän jälkeen on ongelma, sillä Reija asuu Vaasassa, missä sää voi päivän aikana vaihdella rajustikin.

Reijan on päätettävä aamulla käyttääkö normaalia vaatetusta, sadetakkia vai sateenvarjoa. Mikäli sää on kuiva, rasittaa sateenvarjon turha kanniskelu ja sadetakki on aina yhtä epämukava ja hiostava. Mikäli sää on sateinen, on sadetakki hyvä, mutta hieman hiostava; sateenvarjo olisi mukavampi. Mikäli sää on sateinen ja tuulinen, niin sateenvarjosta ei ole paljoakaan hyötyä ja sadetakki on ehdottomasti paras valinta.

Päätösmatriisi

Reija päättää valita kolmen vaihtoehdon väliltä:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{Normaali vaatetus.} \\ a_2 &= \text{Sateenvarjo.} \\ a_3 &= \text{Sadetakki.} \end{aligned}$$

Reija päättää tarkastella päätösvaihtoehtojaan kolmessa eri skenaariossa:

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{Kuiva sää.} \\ s_2 &= \text{Sateinen, mutta tyyni sää.} \\ s_3 &= \text{Sateinen ja tuulinen sää.} \end{aligned}$$

Koska Reija on sääennustekriittinen, hän ei vaivaudu pohtimaan eri säätilojen mahdollisia todennäköisyyksiä. Hän ei siis perusta päätöstään todennäköisyyksille

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{Kuivan sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.} \\ p_2 &= \text{Sateisen, mutta tyynen sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.} \\ p_3 &= \text{Sateisen ja tuulisen sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.} \end{aligned}$$

Päätösten seuraukset — eli palkkiot — eri skenaarioissa Reija laskee oman subjektiivisen mukavuutensa mukaan, jotka ovat lukuja asteikolla $0 \ldots 100$ (prosenttia). Nämä mukavuudet perustuvat Reijan näkemyksille:

- Normivaatteet ovat hyvä valinta kuivalla säällä, mutta sateen sattuessa pahin mahdollinen valinta.
- Sateenvarjon kantaminen rasittaa pikkuisen ja tuulella siitä ei ole mitään hyötyä.
- Sadetakki on turvallinen valinta säällä kuin säällä, mutta se itsessään on kohtalaisen epämukava (hiostavuutensa takia).

Koska mukavuus on subjektiivisuuden lisäksi äärimmäisen hämärä käsite, niin Reija ei mittaa sitä tiheällä kammalla, vaan käyttää neljän kohdan asteikkoa

$$
\begin{aligned}
100 &= \text{Oikein mukavaa.}\\
80 &= \text{Mukavahkoa.}\\
20 &= \text{Kohtalaisen epämukavaa.}\\
0 &= \text{Erittäin epämukavaa.}
\end{aligned}
$$

Reija päätyy palkkiomatriisiin

	Säätila		
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli
Normivaatteet	100	0	0
Sateenvarjo	80	80	0
Sadetakki	20	20	20

Reija, kuten kuka tahansa meistä, tekee päätöksensä intuitiivisesti. Koska Reija kuitenkin on aavistuksen analyyttinen, hän silmäilee yllä olevaa palkkiomatriisiansa (joka on hänen intuitionsa kuva), ja päätyy valitsemaan vaihtoehdon a_2 = Sateenvarjo.

Seuraavaksi Reija jatkaa analyysin tiellä ja ehkä analyysin seurauksena muuttaa päätöstään; ehkä ei. Jos ei, niin ehkä hän keksii päätökselleen hyvät perusteet tai ainakin tekosyyt.

Päätössäännot ja päätös

Intuitiivisesti Reija on tehny päätöksen a_2 = Sateenvarjo. Saamme päätösmatriisin, johon on merkitty tämä intuitiivinen päätössääntö ja sen mukainen valinta binäärisesti niin, että 1 tarkoittaa valintaa (jota on vielä korostettu lihavoinnilla) ja 0 tarkoittaa hylkäämistä:

	Säätila			Arvo
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli	V^{int}
Normivaatteet	100	0	0	0
Sateenvarjo	80	80	0	**1**
Sadetakki	20	20	20	0

Formaalisti V^{int} on päätössääntö eli päätösfunktio, joka liittää jokaiseen päätökseen a_i arvon V_i^{int}.

Intuitiivisen päätöksen lisäksi Reija haluaa tutkia päätöksensä taustoja ja arvoja. Reijan mielestä katumuksen kaihtaminen on paras peruste tehdä päätöksiä.

Katumuksen kaihtaminen on tietynlaista jossittelua. Katumus tulee siitä, että emme tehneetkään parasta mahdollista päätöstä, jos olisimme tienneet mikä skenaario toteutuu. Formaalisti, jos R_{ij} on päätökseen a_i liittyvä palkkio, kun skenaario s_j toteutuu, sattuu katumus

$$K_{ij} \quad = \quad \max_i R_{ij} - R_{ij}.$$

Tässä siis R_{ij} on saatu palkkio, ja $\max_i R_{ij}$ on paras mahdollinen palkkio, mikä oltaisiin saatu, jos oltaisiin osattu ennustaa skenaario s_j ennalta ja valittu paras mahdollinen päätös a_i skenaariolle s_j.

Reija Reipas päätyy siis katumusmatriisiin

	Säätilan aiheuttama katumus		
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli
Normivaatteet	0	80	20
Sateenvarjo	20	0	20
Sadetakki	80	60	0

Koska Reija, katumuksen kaihtajana, halua minimoida maksimaalisen kadutuksen, hänen katumuksenkaihtoarvonsa V^{kk}, eli maksimaaliset kadutukset, ovat

	Säätilan aiheuttama katumus			Arvo
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli	V^{kk}
Normivaatteet	0	80	20	80
Sateenvarjo	20	0	20	**20**
Sadetakki	80	60	0	80

Minimoidakseen maksimaalisen katumuksensa Reija Reippaan pitää siis valita päätös a_2 = Sateenvarjo.

Reija Reippaan intuitiivinen valinta ja katumuksen kaihtamiseen liittyvä analyyttinen valinta ovat siis samoja. Reija Reipas voi onnitella itseään konsistenttiudestaan.

Herkkyysanalyysi

Reijan päätös perustuu olennaisesti hänen subjektiiviseen arvioonsa ja sitä kautta olennaisesti hänen neljän kohdan asteikkoonsa, joka oli (prosenttiasteikkona)

$$\begin{aligned} 100 &= \text{Oikein mukavaa.} \\ 80 &= \text{Mukavahkoa.} \\ 20 &= \text{Kohtalaisen epämukavaa.} \\ 0 &= \text{Erittäin epämukavaa.} \end{aligned}$$

Tätä asteikkoa lukuun ottamatta Reijan analyysi on robustia: se siis ei ole herkkää millekään parametrien muutoksille, kunhan vain skenaariot (kuivaa, sateista ja tyyntä, sateista ja tuulista) ja päätökset (normivaatteet, sateenvarjo, sadetakki) on kiinnitetty.

Mukavuusasteikko sen sijaan saattaa olla kovinkin herkkä. Asteikko 100, 80, 20, 0 (prosenttia) on monella tapaa mielivaltainen. Miksi juuri nämä luvut? Nyt siis 100 = Oikein mukavaa ja 0 = Erittäin epämukavaa. Nämä ovat asteikon ääripäät ja siten niissä ei välttämättä ole mitään herkkää. Kyse on vain skaalauksesta. Sen sijaan asteikon välipisteet 80 = Mukavahkoa ja 20 = Kohtalaisen epämukavaa ovat jossain määrin mielivaltaisia. Koska asteikko 100, 80, 20, 0 on symmetrinen ylä- ja alapään suhteen, siis 100-80=20 ja 20-0 = 0, on jollain tapaa perusteltua yleistää mukavuusasteikkoa niin, että se on muotoa

$$\begin{aligned} 1 &= \text{Oikein mukavaa.} \\ c &= \text{Mukavahkoa.} \\ 1-c &= \text{Kohtalaisen epämukavaa.} \\ 0 &= \text{Erittäin epämukavaa.} \end{aligned}$$

(Nyt siis unohdimme prosentit yksikköinä ja kirjoitamme lyhyesti 1 = 100 %.)

Parametri c on välimukavuusaste, joka on välillä $0.5\ldots1$. Parametri c siis kuvaa sitä, kuinka paljon Reija Reipas painottaa mukavuutensa ääripäitä (kun $c=0.5$ vaihtoehdot mukavahkoa ja kohtalaisen epämukavaa saavat saman mukavuusarvon 0.5, ja kun $c=1$, niin oikein mukavaa ja mukavahko saavat saman mukavuusarvon 0 ja kohtalaisen epämukavaa ja erittäine epämukavaa saavat saman mukavuusarvon 0).

Käyttämällä parametria c Reijan päätösmatriisi on (täydennettynä intuitiivisella päätössäännöllä V^{int})

	Säätila			Arvo
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli	V^{int}
Normivaatteet	1	0	0	0
Sateenvarjo	c	c	0	**1**
Sadetakki	$1-c$	$1-c$	$1-c$	0

Reijan c:llä parametrisoitu katumusmatriisi ja siihen liittyvät maksimaaliset kadutukset V^{kk} ovat (koska $c \geq 0.5$)

	Säätilan aiheuttama katumus			Arvo
Varusteet	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli	V^{kk}
Normivaatteet	0	c	$1-c$	c
Sateenvarjo	$1-c$	0	$1-c$	$\mathbf{1-c}$
Sadetakki	c	$2c-1$	0	c

Koska $c \geq 0.5$, niin $1-c \leq c$. Samoin $c \geq 2c-1$. Näemme että Reija Reipas on todellakin katumuksen kaihtaja, eikä hänen intuitiivinen päätöksensä ole ollenkaan herkkä sille, miten hän painottaa mukavuutensa ääripäitä (symmetrisesti parametrilla c mitattuna).

Luku 2

Yrjö Yhtä-Reippaan synkronoidut säävarusteet

Ongelman kuvaus

Yrjö Yhtä-Reipas hyötykävelee työpaikalleen ja takaisin joka päivä puolisonsa Reija Reippaan kanssa. Yrjöllä on päätösongelman vaihtoehdot samat kuin Reijalla: normaali vaatetus, sateenvarjo vai sadetakki.

Lisämausteena Yrjön ongelmassa on toive saada aikaiseksi yhteisesti päätetty sama päätös Reijan kanssa.

Yrjö mallintaa mahdolliset säätilat lähes kuten Reija. Säätilojen kuiva sää, sateinen tyyni sää ja sateinen tuulinen sää lisäksi Yrjö ei pidä helteestä. Tunnetusti Vaasassa sateella ei ole hellettä, joten Yrjön kannalta relevanttia on jakaa säätilä kuiva sää kahdeksi tilaksi: kuiva kuuma sää ja kuiva viileä sää.

Päätösmatriisi

Kuten Reija, myös Yrjö päättää valita kolmen vaihtoehdon väliltä:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \text{Normaali vaatetus.} \\
a_2 &= \text{Sateenvarjo.} \\
a_3 &= \text{Sadetakki.}
\end{aligned}
$$

Yrjön skenaariot ovat laajennettu versio Reijan skeraarioista. Korostamme tätä puumaisella numeroinnilla:

$$
\begin{aligned}
s_{1,1} &= \text{Kuiva kuuma sää.} \\
s_{1,2} &= \text{Kuiva viileä sää.} \\
s_2 &= \text{Sateinen, mutta tyyni sää.} \\
s_3 &= \text{Sateinen ja tuulinen sää.}
\end{aligned}
$$

Toisin kuin Reija, Yrjö ei ole sääennustekriittinen. Hän on erittäin kiinnostunut todennäköisyyksistä

$$
p_{1,1} = \text{Kuivan kuuman sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{1,2} &= \text{Kuivan viileän sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.}\\
p_2 &= \text{Sateisen, mutta tyynen sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.}\\
p_3 &= \text{Sateisen ja tuulisen sään todennäköisyys työpäivän päätyttyä.}
\end{aligned}
$$

Päätössäännöt ja päätös

Yrjö, kuten puolisonsa Reija, perustaa päätöksensä omalle subjektiiviselle mukavuudelleen. Mukavuuden suhteen Yrjö on ekstremisti: hänelle kaikki on joko mukavaa (arvo 1) tai epämukavaa (arvo 0). Yrjön mukavuusmatriisi on

	Säätila			
Varusteet	Kuiva ja kuuma	Kuiva ja viileä	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli
Normivaatteet	1	1	0	0
Sateenvarjo	0	0	1	0
Sadetakki	0	1	0	1

Intuitiivisesti Yrjö ajattelee, että a_2=Sateenvarjo on hyvä valinta. (Ehkä tähän vaikuttaa Yrjön puolison valinta.) Yrjön intuitiivinen päätösmatriisi on siis

	Säätila				**Arvo**
Varusteet	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	s_2	s_3	V^{int}
a_1	1	1	0	0	0
a_2	0	0	1	0	**1**
a_3	0	1	0	1	0

(Siirryimme käyttämään symboleja, koska muuten sivun reunat olisivat hieman paukkuneet ja jatkossa paukkuisivat vieläkin pahemmin.)

Intuitiivisen päätöksen lisäksi Yrjö haluaa tutkia päätöksensä taustoja ja arvoja. Yrjön mielestä paras perusta päätöksille on odotusarvosääntö: päätöksen arvo on sen todennäköisyyksin painotettu keskiarvo:

$$
V_i^{\text{oa}} = \sum_j R_{ij} p_j,
$$

missä p_j on skenaarion s_j todennäköisyys, summausindeksi j käy läpi kaikki mahdolliset skenaariot ja R_{ij} on päätöstä a_i vastaava palkkio, kun skenaario s_j toteutuu. Todennäköisyyslaskennan kielellä sanottuna a_i on satunnaismuuttuja ja Yrjön päätös on siten odotusarvo

$$
\begin{aligned}
V_i^{\text{oa}} &= \mathbb{E}[a_i]\\
&= \sum_j a_i(s_j)\,\mathbb{P}[s_j]\\
&= \sum_j R_{ij} p_j.
\end{aligned}
$$

(Kaytämme hakasulkeita odotusarvon $\mathbb{E}$ ja todennäköisyyden $\mathbb{P}$ yhteydessä puhtaasti esteettisistä syistä. Notaatiossa ei ole mitään syvällistä.)

Jotta Yrjö Yhtä-Reipas voisi käyttää odotusarvosääntöä, on hänen tunnettava eri vaihtoehtoisten skenaarioiden s_j todennäköisyydet $p_j = \mathbb{P}[s_j]$. Yleisesti ottaen todennäköisyyksien estimointi on erittäin haastava ongelma, jollei kyse ole esimerkiksi korttipelistä. Onneksi Yrjö voi käyttää asiantuntijatietoa apunaan; nimittäin sääennustetta. Yrjö siis tarkistaa mitä iltapäiväksi on luvassa ja saa tiedot:

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= 0.05 \\ p_{1,2} &= 0.45 \\ p_2 &= 0.25 \\ p_3 &= 0.25 \end{aligned}$$

(Siispä esimerkiksi sateen todennäköisyys on $p_2+p_3 = 0.50$, kuivan helteen todennäköisyys on $p_{1,1} = 0.05$ ja sateenvarjolle opimaalisen sään, tyynen sateen, todennäköisyys on $p_2 = 0.25$.)

Arvofunktion V^{oa} laskeminen on nyt suoraviivaista, joskin hieman työlästä. Saamme arvot

$$\begin{aligned} V_1^{\text{oa}} &= 1 \cdot p_{1,1} + 1 \cdot p_{1,2} + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ &= 0.05 + 0.45 \\ &= 0.50, \\ V_2^{\text{oa}} &= 0 \cdot p_{1,1} + 0 \cdot p_{1,2} + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ &= 0.25, \\ V_3^{\text{oa}} &= 0 \cdot p_{1,1} + 1 \cdot p_{1,2} + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 \\ &= 0.45 + 0.25 \\ &= 0.70. \end{aligned}$$

Keräämme analyysimme Yrjölle matriisiin (eli taulukkoon), johon olemme myös lisänneet skenaarioiden todennäköisyydet näkyviin:

	Säätila				**Arvo**	
Varusteet	$s_{1,1}$ (0.05)	$s_{1,2}$ (0.45)	s_2 (0.25)	s_3 (0.25)	V^{int}	V^{oa}
a_1	1	1	0	0	0	0.50
a_2	0	0	1	0	**1**	0.25
a_3	0	1	0	1	0	**0.70**

Näemme, että odotusarvosäännön mukainen päätös ei olekaan a_2=Sateenvarjo, vaan a_3=Sadetakki. Yrjön intuitiivinen päätös ei vastaakaan odotusarvosääntöä. Yrjöllä on nyt kaksi vaihtoehdoa: joko pitää kiinni intuitiostaan tai päätössäännöstään, joka on odotusarvosääntö. Yrjö päättää pitää kiinni odotusarvosäännöstä ja muuttaa päätöksensä. Hän siis valitsee päätöksen a_3=Sadetakki.

Päätössääntöjen yhdistäminen ja yhteinen päätös

Reija Reipas ja Yrjö Yhtä-reipas päätyivät eri valintoihin. Mikään ei tietystikään estä heitä varustautumasta eri tavoin hyötykävelyynsä, mutta "yhteisen mukavuuden" kannalta olisi parempi käyttää samanlaisia varusteita. Tehtävänä on siis keksiä perusteltu kompromissi ja sitä kautta yhteinen päätös.

Päätöksiä joiden väliltä valita oli kolme: a_1, a_2 ja a_3. Reija valitsi päätöksen a_2 ja Yrjö päätöksen a_3. Nyt joku saattaisi luulla, että tehtävänämme on ainoastaan valita, kumpi päätös

— a_2 vai a_3 — valitaan. Tämä on kuitenkin huono lähestymistapa. Voi nimittäin periaatteessa olla niin, että Reijalle päätös a_1 on ihan ok, mutta päätös a_3 on aivan käsittämättömän vastenmielinen. Samoin Yrjö saattaa ajatella, että päätös a_2 on aivan hirvittävä, mutta päätös a_1 menettelee. Tällöin päätös a_1 saattaisi olla oikein hyvä kompromissi sekä Reijan että Yrjön kannalta.

Sekä Reija Reipas että Yrjö Yhtä-Reipas tarkastelivat subjektiivisia mukavuuksia asteikolla $0\ldots1$ päätöksentekonsa pohjana. Valitettavasti tämä ei kuitenkaan auta päätösten yhdistämisessä, sillä Reijan ja Yrjön päätössäännöt olivat radikaalisti erilaisia. Reija pyrki minimoimaan maksimaalisen katumuksensa ja Yrjö pyrki maksimoimaan odotetun (todennäköisyysmielessä) mukavuutensa. Reijan ja Yrjön arvot ovat aivan eri skaalalla. Lisäksi Reijan päätös tulee minimoinnista ja Yrjön maksimoinnista.

Jotta Reijan ja Yrjön päätöksiä voidaan vertailla järkevästi kompromissia silmällä pitäen, on ne asetettava samalle skaalalle ja muotoilla molemmat joko maksimointina tai minimointina. Yrjön ongelma on maksimointi ja tietyssä mielessä skaalalla $0\ldots1$ (muttei ehkä aivan täysin). Muutamme Reijan ongelman maksimoinniksi ja skaalaamme sen välille $0\ldots1$.

Jatkossa merkitsemme, silloin kun se on tarpeellista, kaavoissa R tarkoittaen Reijaa ja Y tarkoittaen Yrjöä.

Reijan päätösmatriisi oli (unohdamme nyt intuitiiviset päätökset täysin ja kirjoitamme lyhyesti käyttämälä merkintöjä a_i päätöksille ja s_j skenaarioille):

	Säätila			**Arvo**
Varusteet	s_1	s_2	s_3	$V^{\mathrm{kk}}(R)$
a_1	0	80	20	80
a_2	20	0	20	**20**
a_3	80	60	0	80

Voisimme skaalata tässä kaikki välille $0\ldots1$ ja siirtyä minimoinnista maksimointiin esimerkiksi peilaamalla kaikki saadut luvut ykkösen suhteen: $x \mapsto 1-x$. Tällöin voisimme vertailla myös palkkiomatriiseja Reija ja Yrjön välillä. Tästä voisi olla jotakin hyötyä, mutta emme kuitenkaan lähde tälle tielle. Sen sijaan katsomme ainoastaan päätösten arvoja, emme sitä miten ne on saatu.

Reija siis tarkastelee ainoastaan maksimaalisia katumuksiaan eri päätöksille:

$$
\begin{aligned}
V_1^{\mathrm{kk}}(R) &= 80, \\
V_2^{\mathrm{kk}}(R) &= 20, \\
V_3^{\mathrm{kk}}(R) &= 80.
\end{aligned}
$$

Samoin Yrjö tarkastelee ainoastaan eri päätösten odotusarvoja:

$$
\begin{aligned}
V_1^{\mathrm{oa}}(Y) &= 0.50, \\
V_2^{\mathrm{oa}}(Y) &= 0.25, \\
V_3^{\mathrm{oa}}(Y) &= 0.70.
\end{aligned}
$$

Reijan päätössääntö on minimointimuotoinen. Se saadaan maksimointimotoiseksi esimerkiksi kertomalla kaikki miinus ykkösellä. Käytämme siis muunnosta

$$
V_i \longleftarrow -V_i,
$$

missä V_i on päätöksen a_i arvo minimointimuotoisessa päätössäännössä. Tämä muunnos ei muuta Reijan päätöstä mitenkään, sillä yleisesti mille tahansa funktiolle f pätee

$$\operatorname*{argmax}_x f(x) = \operatorname*{argmin}_x [-f(x)],$$

missä argmax ja argmin tarkoittaa niitä pisteitä x, joissa vastaavat maksimit ja minimit saavutetaan.

Käyttämällä merkintää $V_i^{\mathrm{rr}} = -V_i^{\mathrm{kk}}$ (rr = riemun rakastaminen) tälle uudelle arvofunktiolle saamme Reijan päätökset muotoon

$$\begin{aligned}
V_1^{\mathrm{rr}}(R) &= -80,\\
V_2^{\mathrm{rr}}(R) &= -20,\\
V_3^{\mathrm{rr}}(R) &= -80.
\end{aligned}$$

Reijan ongelma on nyt maksimointiongelma. Vielä pitää skaalata Reijan riemun rakastaminen (välille $0\ldots1$, miksipä käyttäisimme mitään muuta asteikkoa). Kaksi eri tapaa tulee heti mieleen:

(i) Skaalaamme arvot niin, että ne muodostavat todennäköisyysjakauman.
(ii) Skaalaamme arvot niin, että suurin arvo saa luvun 1 ja pienin saa arvon 0.

Molemmilla skaalauksilla on hyvät ja huonot puolensa, ja muitakin skaalauksia on olemassa. Käytämme skaalausta (ii), sillä se lienee helpoin ymmärtää ja toteuttaa. Formaalisti skaalaus (ii) toteutetaan (yleensä) asettamalla uudet arvot kaavalla

$$V_i \longleftarrow \frac{V_i - \min_k V_k}{\max_k V_k - \min_k V_k},$$

missä V_i on päätöksen a_i arvo ja $\max_k V_k$ ja $\min_k V_k$ ovat parhaimman ja huonoimman päätöksen arvot. Tällöin siis $\max_k V_k - \min_k V_k$ on alkuperäisten arvojen vaihteluväli.

Huomautus Jos arvovektori V on vakio, niin tällöin skaalauksessa jaetaan nollalla. Tämä on ongelmallista. Sovimme että vakioarvovektorille skaalattu vektori on vakiovektori $V_i = 1$. Jatkossa käytämme seuraavaa GNU Octaven funktiota laskemaan vektorin skaalauksen.

```
function V_skaalattu = skaalaus(V)
%% Funktio V_skaalattu = skaalaus(V) palauttaa skaalatun vektorin
%% V_skaalattu = (V-min(V))/(max(V)-min(V)), jos max(V) > min(V) ja
%% vakiovektorin V_skaalattu = [1 1 1 ... 1]' muulloin.
%% Vektori V_skaalattu on pystyvektori.

    %% Tehdaan V:sta pystyvekyoti
    if size(V,1) < size(V,2)
        V = V';
    end
    %% V on vakiovektori.
    if max(V) == min(V)
        V_skaalattu = ones(length(V),1);
    %% V ei ole vakiovektori.
    else
        V_skaalattu = (V-min(V)) / (max(V)-min(V));
    end
end
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/skaalaus.m

Skaalausmuunnos ei muuta Reijan päätöstä mitenkään, sillä yleisesti mille tahansa funktiolle f ja luvuille $a < b$ pätee

$$\operatorname*{argmax}_x f(x) \;=\; \operatorname*{argmax}_x \frac{f(x)-a}{b-a}.$$

Reijan Skaalatut päätöksien arvot (käytämme niille lyhyesti merkintää $V(R)$) ovat

$$\begin{aligned} V_1(R) &= \frac{-80-(-80)}{-20-(-80)} \\ &= 0, \\ V_2(R) &= \frac{-20-(-80)}{-20-(-80)} \\ &= 1, \\ V_3(R) &= \frac{-80-(-80)}{-20-(-80)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Samalla tavalla Yrjön skaalatut päätökset (käytämme niille, yllätys–yllätys, merkintää $V(Y)$) ovat

$$\begin{aligned} V_1(Y) &= \frac{0.50-0.25}{0.70-0.25} \\ &= 0.56, \\ V_2(Y) &= \frac{0.25-0.25}{0.70-0.25} \\ &= 0, \\ V_3(Y) &= \frac{0.70-0.25}{0.70-0.25} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Reijan ja Yrjön arvotukset ovat nyt molemmat maksimointimuotoa ja ne on skaalattu valille $0\ldots1$ samalla tavalla. Ne ovat nyt siis vertailukelpoisia ja näyttävät tältä:

	Arvot	
Varusteet	$V(R)$	$V(Y)$
a_1	0	0.56
a_2	**1**	0
a_3	0	**1**

Reija ja Yrjö voivat nyt ehkä päästä kompromissiin pelkästään katsomalla yllä olevaa taulukkoa. Hieman analyyttisempi tapa on yhdistää Reijan ja Yrjön arvofuktiot yhteiseksi arvofunktioksi valitsemalla paino w väliltä $0\ldots1$, niin että Reijan näkemys saa painoarvon w ja Yrjön näkemys saa painoarvon $1-w$. Formaalisti siis yhteinen arvo valinnalle a_i painolla w on

$$V_i(w) \;=\; wV_i(R) + (1-w)V_i(Y)$$

Seuraavaan taulukkoon olemme laskeneet sarakkeisiin yhdistetyt arvot painoilla 0.75, 0.50 ja 0.25 ja lihavoineet optimivalinnan kohdan jokaiselle päätössäännölle:

Varusteet	Arvot				
	$V(R)$	$V(Y)$	V(0.75)	V(0.50)	V(0.25)
a_1	0	0.56	0.14	0.28	0.42
a_2	**1**	0	**0.75**	**0.50**	0.25
a_3	0	**1**	0.25	**0.50**	**0.75**

Näemme, että ainakin tasa-arvoisessa tilanteessa $w = 0.5$, päätökset a_2 ja a_3 ovat yhtä hyviä. Voimme myös arvella, että jos Reija saa suuremman painoarvon yhteispäätöksessä, niin Reijan päätös pitää, ja jos Yrjö, niin Yrjön. Päätös a_1=Normivaatteet ei vaikuta hyvältä kompromissilta. Jotta kuitenkin olisimme varmoja, pitäisi meidän tarkastella painoja w tarkemmin. Tämä tehdään seuraavassa osiossa.

Herkkyysanalyysi

Emme ole vielä tarkastelleet Yrjö Yhtä-Reippaan päätösongelmaan liittyviä herkkyyksiä. Teemme sen nyt yhdistetyssä Reijan ja Yrjön ongelmassa.

Yrjö Yhtä-Reippaan päätösongelmassa ei ole selkeitä herkkyysparametreja, jollei oteta huomioon sääennusteen luotettavuutta. Tässä siis luotettavuus tarkoittaa sääennusteisiin liittyvien todennäköisyyksien luotettavuutta, mitä se sitten ikinä tarkoittaakaan. Koska todennäköisyyksien luotettavuus on viheliäisen vaikea ongelma edes kuvata, saati ratkaista, emme tarkastele todennäköisyysparametrien herkkyyttä (ainakaan vielä tässä).

Tarkastelemme herkkyyttä parametrien c ja w suhteen, missä

c kuvaa, miten Reija painottaa mukavuuksiensa ääripäitä (symmetrisesti) ja
w kuvaa Reijan painoarvoa yhteispäätöksessä.

Reijan katumusmatriisi ja sen päätösarvot $V^{\mathrm{kk}}(R;c)$ olivat

Varusteet	Säätilan aiheuttama katumus			Arvo
	Kuiva	Sade ja tyyni	Sade ja tuuli	$V^{\mathrm{kk}}(R;c)$
Normivaatteet	0	c	$1-c$	c
Sateenvarjo	$1-c$	0	$1-c$	$\mathbf{1-c}$
Sadetakki	c	$2c-1$	0	c

Muuttamalla maksimoinnin minimoinniksi muunnoksella

$$V_i \longleftarrow -V_i$$

ja skaalaamalla tulokset välille $0\ldots1$ muunnoksella

$$V_i \longleftarrow \frac{V_i - \min_k V_k}{\max_k V_k - \min_k V_k},$$

saamme skaalatut Reijan arvot

$$\begin{aligned} V_1(R;c) &= \frac{-c-(-c)}{-(1-c)-(-c)} \\ &= 0, \\ V_2(R;c) &= \frac{-(1-c)-(-c)}{-(1-c)-(-c)} \\ &= 1, \\ V_3(R;c) &= \frac{-c-(-c)}{-(1-c)-(-c)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Huomaamme että Reijan herkkyysparametri c (välimukavuusaste) häviää skaalatusta arvofunktiosta. Siten yhteispäätöksenteossa sillä ei ole mitään merkitystä. Sillä ei toki ollut Reijallekaan mitään merkitystä hänen oman päätöksensä valinnan kannalta, mutta tästä ei seuraa etteikö sillä voisi periaatteessa olla merkitystä yhteispäätöksen valinnassa.

Ainoa jäljelle jäävä herkkyysparametri on paino w. Koska

$$\begin{aligned} V_1(w) &= 0.56(1-w), \\ V_2(w) &= w, \\ V_3(w) &= (1-w), \end{aligned}$$

näemme että a_1 ei ole koskaan optimaalinen valinta ja a_2 on optimaalinen valinta jos ja vain jos $w \geq 0.5$ ja a_3 on optimaalinen valinta jos ja vain jos $w \leq 0.5$.

Osa II

Päätösmatriisitekniikkaa

Luku 3

Päätösmatriisit ja päätössäännöt

Staattinen perusasetelma

Tarkastelemme päätösongelmia, jotka ovat perusmuodoltaan **staattisia**: päätös vain kerran ja sen jälkeen katsotaan seuraukset. Päätökset eivät vaikuta mitenkään seurauksiin tai niiden todennäköisyyksiin. Aikaulottuvuutta eli **dynamiikkaa** tai syy-seuraussuhteita ei periaatteessa ole. Käytännössä kuitenkin dynamiikka ja syy-seuraussuhteet (jos sellaisiin uskoo) saadaan päätösmatriiseihin mukaan tuttuun tapaan **jossittelemalla**. Miten, sen kerromme luvun lopussa.

Yksinkertaisin lähestymistapa päätösmatriiseihin on ajatella, että päätöksentekijä Tu Ipse (sinä itse) valitsee jonkin päätöksen a_i joukosta $\{a_i\,;\, i \in I\}$ ja tämän jälkeen Fortuna Brevis (kohtalon jumalatar) valitsee jonkin skenaarion, eli maailman tilan, s_j joukosta $\{s_j\,;\, j \in J\}$. Tässä pelissä Tu Ipse saa palkkion R_{ij}.

Todennäköisyyslaskennan kielellä voimme sanoa, että maailmantilat muodostavat todennäköisyysavaruuden $\Omega = \{s_j\,;\, j \in J\}$. Päätökset a_i, $i \in I$, ovat satunnaismuuttujia $a_i : \Omega \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat $a_i(s_j) = R_{ij}$ todennäköisyyksin

$$\mathbb{P}\big[a_i = R_{ij}\big] \quad = \quad p_j,$$

tai yhtä hyvin

$$p_j \quad = \quad \mathbb{P}[s_j].$$

(Käytämme tässä hakasulkeita todennäköisyyden $\mathbb{P}$ yhteydessä pelkästään esteettisistä syistä. Syvempää merkitystä tällä notaatiolla ei ole.)

Päätössääntöön liittyvä **arvofunktio** $V : I \to \mathbb{R}$ voi olla periaatteessa ihan mikä tahansa funktio, joka liittää päätökseen a_i arvon V_i (jotkin funktiovalinnat saattavat tosin olla varsin pöhköjä). Itse **päätössääntö** on arvofunktion minimointia tai maksimointia. Vaikka päätössääntö ja siihen liittyvä arvofunktio ovatkin tarkasti ottaen siis hieman eri asioita, emme yleensä tee niiden välillä eroa, vaan oletamme että mitä tarkalleen ottaen tarkoitetaan selviää asiayhteydestä.

Jos päätössääntö on maksimointimuotoinen, niin se tarkoittaa että päätöksentekijä valitsee sellaisen päätöksen $a^* = a_{i^*}$, jolle

$$V_{i^*} \quad = \quad \max_i V_i.$$

Toisin sanoen

$$i^* = \operatorname*{argmax}_i V_i.$$

Huomattavaa on, että optimaalisia päätöksiä a^* voi olla useita. Mikäli niitä on useita, voi päätöksentekijä valita minkä tahansa niistä tai hienontaa päätösongelmaa.

Jos päätössääntö on minimointimuotoinen, niin se tarkoittaa että päätöksentekijä valitsee sellaisen päätöksen $a^* = a_{i^*}$, jolle

$$V_{i^*} = \min_i V_i.$$

Toisin sanoen

$$i^* = \operatorname*{argmin}_i V_i.$$

Huomattavaa on, että optimaalisia päätöksiä a^* voi olla useita. Mikäli niitä on useita, voi päätöksentekijä valita minkä tahansa niistä tai hienontaa päätösongelmaa.

Ei-stokastisia päätössääntöjä

Formaalisti päätössääntö (jonka samaistamme päätösfunktioon V luonnollisella tavalla) riippuu päätösongelmasta palkkiomatriisin $R = [R_{ij}]_{i\in I, j\in J}$ ja todennköisyyksien $p = [p_j]_{j\in J}$ kautta. Mikäli päätössääntö riippuu ainoastaan palkkiomatriisista R eikä ollenkaan todennäköisyyksistä p, kutsumme päätössääntöä **ei-stokastiseksi**. (Stokastinen tarkoittaa satunnaista. Se tulee kreikan sanasta, joka tarkoittaa tähdätä tai arvata.)

Alla esittelemme lyhyesti muutamia suosittuja ei-stokastisia sääntöjä.

Optimisti on Hannu Hanhi, joka ajattelee että Fortuna Brevis on ystävä. Fortuna valitsee parhaimman mahdollisen maailmantilan s_j optimistin valitsemalle päätökselle a_i. Opimistin arvofunktio on siis

$$V_i^{\text{opt}} = \max_j R_{ij}$$

Koska optimistin optimaaliselle päätökselle $a^* = a_{i^*}$ pätee

$$V_{i^*}^{\text{opt}} = \max_i \max_j R_{ij},$$

kutsutaan optimistin sääntöä myös **maximax**-säännöksi.

Pessimisti on Aku Ankka, joka ajattelee että Fortuna Brevis on itse asiassa Fortuna Mala. Kohtalon jumalatar on päätöksentekijää vastaan. Mikä tahansa päätös a_i valitaankaan, valitsee Fortuna sellaisen maailmantilan s_j että päätös a_i on huonoin mahdollinen maailmantilassa s_j. Pessimistin arvofunktio on siis

$$V_i^{\text{pess}} = \min_j R_{ij}.$$

Koska pessimistin optimaaliselle päätökselle $a^* = a_{i^*}$ pätee

$$V_{i^*}^{\text{pess}} = \max_i \min_j R_{ij},$$

kutsutaan pessimistin sääntöä myös **maximin**-säännöksi.

Optimisti ja pessimisti ovat annetussa päätöstilanteessa luonnolliset ääripäät. Parempaa palkkiota ei voi hakea kuin optimisti ja pessimisti varautuu kaikista pahimpaan. **Hurwiczin sääntö** on yhdistetty sääntö optimismia ja pessimismiä. Formaalisti se on muotoa

$$\begin{aligned} V_i^{\mathrm{Hur}}(w) &= w \cdot \max_j R_{ij} + (1-w) \cdot \min_j R_{ij} \\ &= w \cdot V_i^{\mathrm{opt}} + (1-w) \cdot V_i^{\mathrm{pess}}. \end{aligned}$$

Tässä parametri w kuuluu välille $0 \ldots 1$ ja sitä kutsutaan päätöksentekijän **optimismin asteeksi**. Käytännössä kai kukaan ei tunne oman optimisminsa astetta, mutta Hurwiczin sääntöä voikin käyttää takaperoisesti: jos (intuitiivisesti) valitsemme jonkin päätöksen, mitä se kertoo optimismimme asteesta.

Katumuksen kaihtaja haluaa minimoida suurimman mahdollisen katumuksensa. Vanhan viisauden mukaan "pessimisti ei pety". Jos pettyminen tarkoittaa katumusta, nin tämä vanha viisaus ei pidä paikkaansa. Katumuksen kaihtaminen on eri asia kuin pessimismi. Katumuksen kaihtamisen säännön soveltaminen vaatii **katumusmatriisin** rakentamista. Katumusmatriisi $K = [K_{ij}]_{i \in I, j \in J}$ kertoo kuinka paljon päätös a_i kaduttaa, jos oltaisiin tiedetty maailmantilan s_j sattuminen etukäteen. Formaalisti

$$K_{ij} = \max_i R_{ij} - R_{ij}.$$

Yllä siis R_{ij} on palkkio mikä saatiin valinnalla a_i maailmantilan s_j satuttua ja $\max_i R_{ij}$ on paras mahdollinen palkkio, mikä oltaisiin saatu, jos oltaisiin oraakkelimaisesti osattu valita paras päätös $a_j^* = \mathrm{argmax}_i\, a_i(s_j)$ sattuneelle maailmantilalle s_j. Koska katumuksen kaihtaja haluaa minimoida suurimman katumuksensa, on hänen arvofunktionsa formaalisti muotoa

$$\begin{aligned} V_i^{\mathrm{kk}} &= \max_j K_{ij} \\ &= \max_j \Big[\max_i R_{ij} - R_{ij} \Big]. \end{aligned}$$

Katumus optimaaliselle päätökselle $a^* = a_{i^*}$ on siten

$$\begin{aligned} V_{i^*}^{\mathrm{kk}} &= \min_i \max_j K_{ij} \\ &= \min_i \max_j \Big[\max_i R_{ij} - R_{ij} \Big]. \end{aligned}$$

Tämän vuoksi katumuksen kaihtamista kutsutaan myös **minimax katumus** -säännöksi.

Edellä esitellyt säännöt — optimisti, pessimisti, Hurwicz ja katumuksen kaihtaja — olivat ei-stokastisia. Ne eivät ottaneet huomioon skenaarioiden s_j, $j \in J$, todennäköisyyksiä p_j, $j \in J$. Tämä on näiden sääntöjen sekä hyvä että huono puoli. Hyvä puoli on se, että todennäköisyyksiä ei tarvitse tietää. Todennäköisyyksien määrittäminen on käytännössä hyvin vaikeaa, ellei kyseessä ole jonkinlainen leikkimaailma kuten vaikkapa ruletin peluu. Huono puoli on se, että nyt kaikki skenaariot ovat jollakin tavalla yhtä arvokkaita. Jos kaikkien skenaarioiden toteutumistodennäköisyydet ovat jotakuinkin samat, tai edes samaa kertaluokkaa, ei tämä ole välttämättä suurikaan ongelma. Jos taas näin ei ole, on se mitä ilmeisimmin ongelma.

Esitämme vielä päätössäännön, jota voisi kutsua **semi-stokastiseksi**. Tämä niin kutsuttu **Laplacen sääntö** perustuu ajatukselle, että kaikilla skenaarioilla on sama todennäköisyys (tai ovat muuten vain samanarvoisia). Jos siis eri skenaarioiden lukumäärä on vaikkapa m, niin päätössääntö on maksimoida arvofunktiota

$$V_i^{\text{Lap}} = \frac{1}{m}\sum_j R_{ij}.$$

Koska päätössääntöjä voidaan skaalata, ja itse asiassa ne on hyvä skaalata jollekin standardiasteikolle, ei m:llä jakamisella ole käytännössä mitään merkitystä. Voimme siis käyttää Laplacen säännössä yhtä hyvin arvofunktiota

$$\tilde{V}_i^{\text{Lap}} = \sum_j R_{ij}.$$

Optimaalisen päätöksen arvo (skaalatussa) Laplacen säännössä on

$$\tilde{V}_{i^*}^{\text{Lap}} = \max_i \sum_j R_{ij}.$$

Tämän takia Laplacen sääntöä voidaan kutsua **max summa** -säännöksi.

Stokastisia päätössääntöjä

Toisin kuin ei-stokastiset säännöt, **stokastiset säännöt** perustuvat annetun palkkiomatriisin $R=[R_{ij}]_{i\in I, j\in J}$ lisäksi skenaarioiden s_j, $j \in J$, todennäköisyyksiin $p=[p_j]_{j\in J}$.

Ehdottomasti luonnollisin stokastinen päätössääntö on **odotusarvosääntö**, jossa maksimoidaan arvofunktiona odotusarvoa eli todennäköisyyskeskiarvoa eli todennäköisyyksin painotettua keskiarvoa

$$V_i^{\mathrm{oa}} = \sum_j R_{ij} p_j.$$

Todennäköisyyslaskennan kielellä tämä tarkoittaa sitä, että satunnaismuuttujan a_i arvo päätöksenteossa on sen **odotusarvo**:

$$\begin{aligned} V_i^{\mathrm{oa}} &= \mathbb{E}[a_i] \\ &= \sum_j a_i(s_j)\mathbb{P}[s_j] \\ &= \sum_j R_{ij} p_j. \end{aligned}$$

Optimaalisen päätöksen $a^* = a_{i^*}$ arvo odotusarvosäännössä on

$$V_{i^*}^{\mathrm{oa}} = \max_i \mathbb{E}[a_i].$$

Tämän takia odotusarvosääntöä kutsutaan joskus (tosin harvoin) **maxi E** -säännöksi.

Mikäli kaikki skenaariot ovat yhtä todennäköisiä, siis p_j=vakio j:n suhteen, pelkistyy odotusarvosääntö Laplacen säännöksi.

Odotusarvosääntöä kutsutaan myös **riskineutraaliksi** säännöksi. Nimittäin siitä seuraa esimerkiksi, että päätöksentekijä on indifferentti (välinpitämätön) seuraavien vaihtoehtojen välillä:

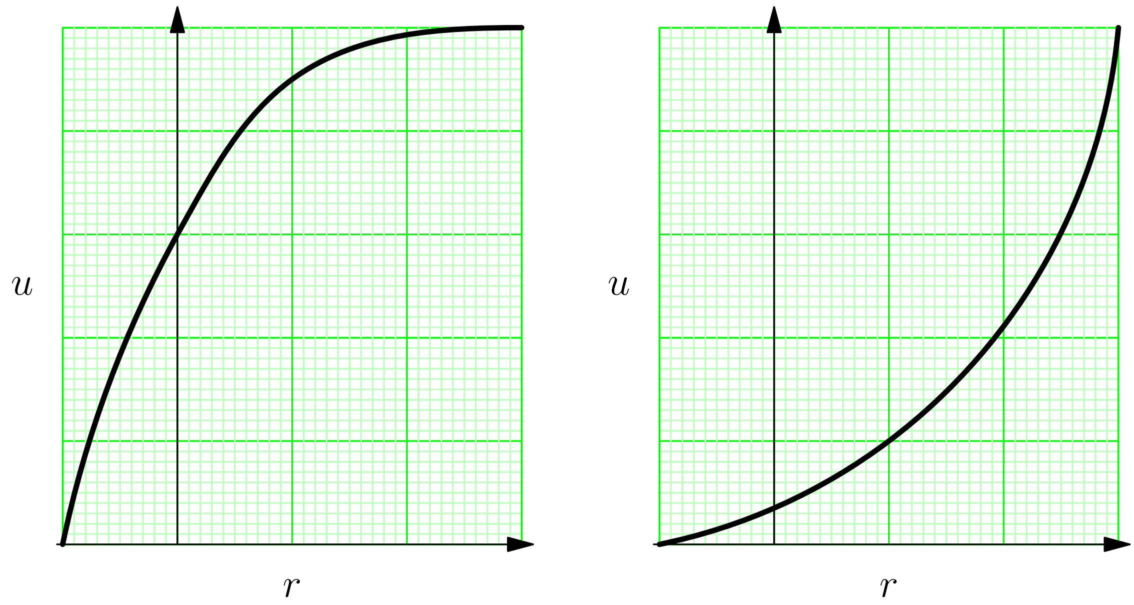
(i) Saada varma voitto 1 €.
(ii) Saada todennäköisyydellä 0.5 voitto 2 € ja todennäköisyydellä 0.5 ei mitään.

Moni meistä onkin varmaan indifferentti näiden valintojen välillä (ja varmaan kohtalaisen indifferentti koko ongelman suhteen). Toisaalta riskineutraali päätöksentekijä on indifferentti myös seuraavien valintojen välillä:

(i) Saada varma voitto 100 000 €.
(ii) Saada todennäköisyydellä 0.5 voitto 200 000 € ja todennäköisyydellä 0.5 ei mitään.

Nyt moni meistä varmaan ottaisi vaihtoehdon (i). Tällainen valinta tarkoittaisi **riskin kaihtamista**. Vaihtoehdon (ii) valinta vastaisi **riskin rakastamista**.

Suhtautumista riskiin mallinnetaan yleensä **hyötyfunktioilla**, joita myös **utiliteettifunktioiksi** kutsutaan. Ajatus on että käytämme edelleen odotusarvosääntöä, mutta emme palkkioille R_{ij} vaan niitä vastaaville niin sanotuille **hyödyille** $U_{ij} = u(R_{ij})$. Tässä $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on hyötyfunktio. Jos **rajahyöty**, eli hyötyfunktion derivaatta u' on laskeva, siis toinen derivaatta u'' on negatiivinen (jolloin u on konkaavi), on päätöksentekijä riskiä kaihtava. Vastaavasti jos rajahyöty on kasvava, eli toinen derivaatta u'' on positiivinen (jolloin u on konveksi), on päätöksentekijä riskiä rakastava. Yleisesti ottaen hyötyfunktion u ei tarvitse olla konkaavi tai konveksi. Riittää että hyötyfunktio on kasvava. Jos hyötyfunktio ei ole konkaavi eikä konveksi, niin silloin päätöksentekijä ei ole mitenkään yksikäsitteisesti riskiä kaihtava tai rakastava, vaan hänen suhtautumisensa riskiin saattaa vaihdella riippuen palkkioiden suuruudesta. Itse asiassa tällainen käytös on tyypillistä.



Riskiä kaihtava hyötyfunktio vasemmalla ja riskiä rakastava hyötyfunktio oikealla.

Jos hyötyfunktio on u annettu, on **hyötysääntöä** vastaava arvofunktio

$$V_i^{\mathrm{util}} = \sum_j u\left(R_{ij}\right) p_j.$$

Todennäköislaskennan kielellä tämä tarkoittaa sitä, että satunnaismuuttujan a_i arvo päätöksenteossa on sitä vastaava **odotettu hyöty**:

$$\begin{aligned} V_i^{\mathrm{util}} &= \mathbb{E}[u(a_i)] \\ &= \sum_j u\left(a_i(s_j)\right) \mathbb{P}[s_j] \\ &= \sum_j u\left(R_{ij}\right) p_j \\ &= \sum_j U_{ij}\, p_j. \end{aligned}$$

Optimaalisen päätöksen $a^* = a_{i^*}$ arvo hyötysäännössä on

$$V_{i^*}^{\mathrm{util}} = \max_i \mathbb{E}[u(a_i)].$$

Tämän takia hyötysääntöä kutsutaan joskus (tosin harvoin) **maxi Eu** -säännöksi.

Odotetun hyödyn sääntö on periaatteessa päätöksenteon kultastandardi. Nimittäin Von Neumann ja Morgenstern ovat hyötyteoriassaan osoittaneet, että päätöksentekijä on rationaalinen jos ja vain jos hän perustaa päätöksensä hyötysäännölle jollakin hyötyfunktiolla u. Tämä tulos periaatteessa vaikuttaa hienolta, ja sitä se onkin, mutta siihen liittyy kaksi ongelmaa:

(i) Monet testit ovat osoittaneet, että päätöksentekijät eivät ole rationaalisia.
(ii) Harva päätöksentekijä tuntee hyötyfunktionsa.

Kohtaan (i) voimme periaatteessa sanoa, että sen pahempi heille. Rationaalinen päätöksentekijä on paremmassa asemassa kuin epärationaalinen. Olkaamme siis rationaalisia. Kohta (ii) on sen sijaan merkittävä käytännöllinen ongelma.

Eräs tapa rakentaa päätöksentekijän hyötyfunktio on olettaa sille jokin parametrinen malli ja estimoida mallin parametri jotenkin, esimerkiksi kyselemällä päätöksentekijältä hänen preferensseistään, tai vielä paremmin, havainnoimalla päätöksentekijän valintoja. Esitämme alla yhden parametrisen mallin ja siihen liittyvän preferenssikyselyn.

Oletamme, että päätöksentekijä on riskiä kaihtava ja hänen **absoluuttinen riskiaversionsa** on vakio. Tosin sanoen

$$-\frac{u''(r)}{u'(r)} \;=\; \text{vakio.}$$

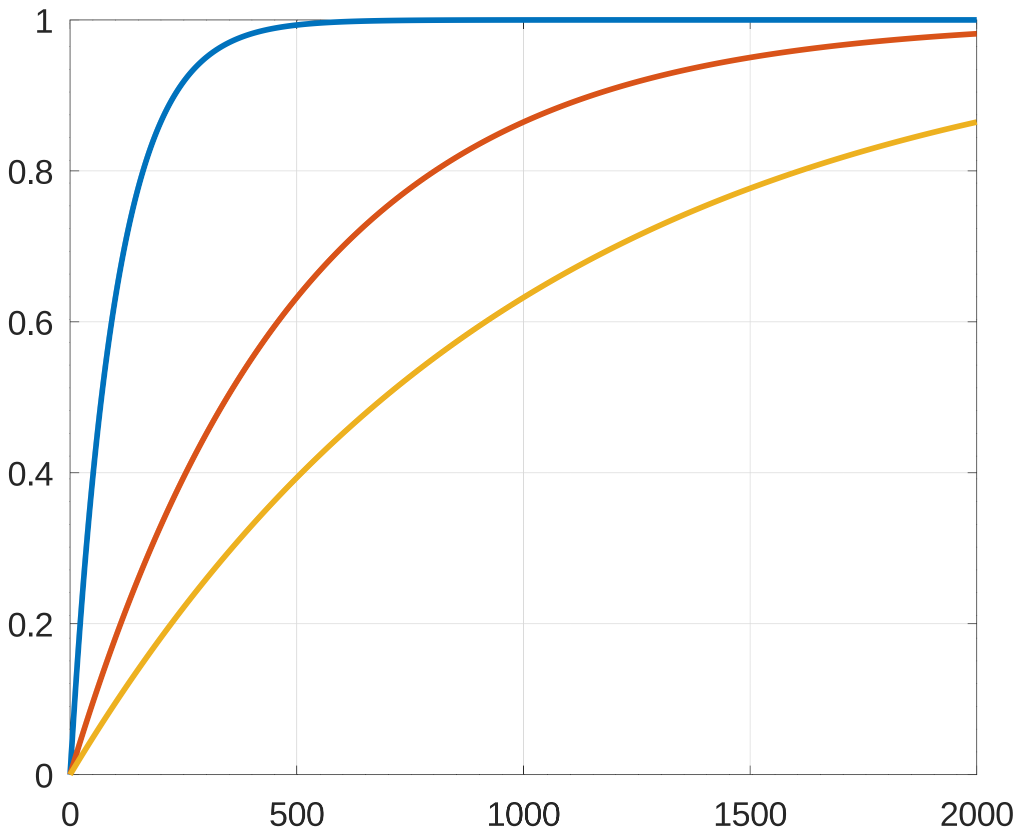
Tämä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista esimerkiksi integroimalla ja tunnistamalla eksponenttifunktion differentiaalimääritelmä. Valitsemalla vakiot sopivalla tavalla päädymme parametriseen malliin

$$u(r) \;=\; 1-\mathrm{e}^{-r/r_0},$$

missä $r_0 > 0$ on mallin parametri, jota kutsutaan **riskitoleranssiksi**. Se voidaan estimoida esimerkiksi kysymällä päätoksentekijältä, millä rahamäärällä r_0 € olet indifferentti seuraavien valintojen suhteen:

(i) Et saa mitään.
(ii) Saat r_0 € todennäköisyydellä 0.5, mutta menetät $r_0/2$ € todennäköisyydellä 0.5.

Mitä ilmeisimmin päätöksentekijä on sitä riskiä kaihtavampi, mitä pienempi r_0 on.



Vakio absoluuttinen riskiaversiivinen hyötyfunktio riskitoleransseilla $r_0 = 100$ (sininen käyrä), $r_0 = 500$ (punainen käyrä) ja $r_0 = 1000$ (keltainen käyrä).

Loppuhuomatuksena kerromme kiinnostuneille, mistä r_0:n indifferenssikysely tulee. Olkoon a päätös (eli satunnaismuuttuja), joka saa arvot r_0 todennäköisyydellä 0.5 ja $-r_0/2$ todennäköisyydellä 0.5. Tällöin edellä kuvattu "vara"-sääntö antaa indifferenssin jollekin luvulle c (jota myös kutsutaan joskus nimellä **varmuusvastine**), joka tulee kaavasta

$$\mathbb{E}[u(a)] \;=\; c.$$

Vasemman puolen odotusarvo on

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(a)] &= u(r_0)\cdot 0.5 \;+\; u(-r_0/2)\cdot 0.5 \\
&= \left(1-e^{-r_0/r_0}\right)\cdot 0.5 \;+\; \left(1-e^{r_0/(2r_0)}\right)\cdot 0.5 \\
&= \left(1-e^{-1}\right)\cdot 0.5 \;+\; \left(1-e^{1/2}\right)\cdot 0.5 \\
&= -0.0083004.
\end{aligned}$$

Tarkemmin ottaen siis kyselyssä kohta (i) pitäisi olla "Menetät varmasti 0.0083004 €", eikä tämäkään ole tarkka arvo.

Sääntöjen yhdistäminen

Päätössääntöjen yhdistäminen perustuu seuraavaan havaintoon. Olkoon $V : I \to \mathbb{R}$ jokin päätössääntö eli arvofunktio, joka on maksimointimuotoinen. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava funktio. Tällöin, päätössääntöinä, V ja $f(V)$ ovat samoja siinä mielessä, että jos a^* on optimaalinen valinta päätössäännölle V, niin se on optimaalinen valinta myös päätössäännölle $f(V)$, ja päinvastoin. Lyhyesti ilmaistuna

$$\operatorname*{argmax}_i V_i \quad = \quad \operatorname*{argmax}_i f(V_i).$$

Olkoon V^1 ja V^2 päätösfunktioita eli päätössääntöjä eli arvofunktioita. Oletamme että sekä V^1 että V^2 ovat maksimointimuotoisia. Jos toinen (tai molemmat) säännöistä ei ole maksimointimuodossa vaan minimointimuodossa, saadaan se (tai ne) maksimointimuotoon yksinkertaisesti esimerkiksi kertomalla sääntö miinus ykkösellä, koska

$$\operatorname*{argmax}_i V_i \quad = \quad \operatorname*{argmin}_i \,[-V_i].$$

Yksinkertaisin tapa yhdistää päätössäännöt V^1 ja V^2 olisi summata ne uudeksi päätössäännöksi $V = V^1 + V^2$. Tämä on kuitenkin harvoin tarkoituksenmukaista. Ensinnäkin säännöt V^1 ja V^2 voivat olla täysin eri skaalalla ja toiseksi voimme ehkä haluta antaa säännöille eri painoarvot yhdistetyssä säännössä.

Sääntöjen V^1 ja V^2 skaalaukselle samalle asteikolle on ainakin kaksi luontevaa tapaa:

(i) Arvojen skaalaus todennäköisyysjakaumaksi.
(ii) Lineaarinen (tai pikemminkin affiini) skaalaus välille $0 \ldots 1$.

(i) Jos arvofunktio V on positiivinen (tai pikemminkin ei-negatiivinen): $V_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$, niin sen arvot saadaan skaalattua todennäköisyysjakaumaksi tekemällä muunnos

$$V_i \quad \longleftarrow \quad \frac{V_i}{\sum_k V_k}.$$

Tämän jälkeen, mitä ilmeisimmin,

- $V_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$,
- $\sum_i V_i = 1$,

mikä tarkoittaa sitä, että $[V_i]_{i \in I}$ on todennäköisyysjakauma.

Jos arvofunktio V ei ole positiivinen, niin se saadaan positiiviseksi tekemällä muunnos

$$V_i \quad \longleftarrow \quad V_i \; - \; \min_k V_k.$$

Tämän jälkeen arvofunktio V voidaan skaalata todennäköisyysjakaumaksi yllä esitellyllä tavalla.

(ii) Affiini skaalaus välille $0 \ldots 1$ saadaan tekemällä muunnos

$$V_i \quad \longleftarrow \quad \frac{V_i \; - \; \min_k V_k}{\max_k V_k \; - \; \min_k V_k}.$$

Tässä ei tarvitse olettaa, että arvot V_i, $i \in I$, ovat positiivisia.

Kun arvofunktiot V^1 ja V^2 ovat samalla skaalalla, on luonnollista yhdistää ne uudeksi arvofunktioksi

$$V(w) \quad = \quad wV^1 \; + \; (1-w)V^2,$$

missä $w \in [0,1]$ on säännön V^1 painoarvo yhdistetyssä säännössä.

Huomautus: Hurwiczin sääntö on yhdistetty sääntö. Siinä ei kuitenkaan skaalattu optimistia ja pessimistiä samalle skaalalle, koska ne ovat jo tietyllä tavalla luonnollisesti samalla skaalalla, koska optimisti ja pessimisti ovat päätöstilanteen ääripäät.

Jos halutaan yhdistää monta päätössääntöä V^1, V^2, $\ldots$, V^n yhdeksi säännöksi, niin se onnistuu ensiksi muuttamalla ko. säännöt samalle skaalalla (samalla tavalla) ja yhdistämällä ne painoilla $[w_\ell]_{\ell=1}^n$ säännöksi

$$V(w) \;=\; \sum_\ell w_\ell V^\ell,$$

missä painot muodostavat todennäköisyysjakauman, eli

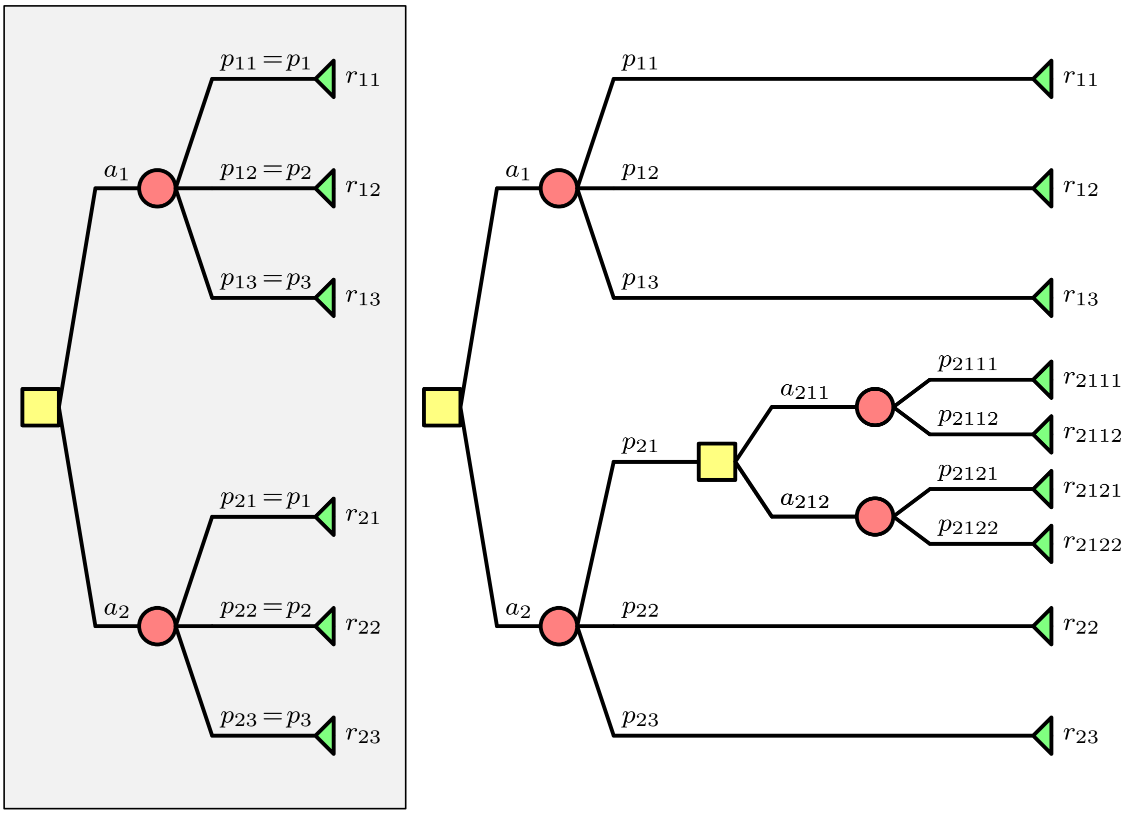
- $w_\ell \geq 0$ kaikilla $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$,
- $\sum_\ell w_\ell = 1$.

Staattisesta asetelmasta dynaamiseen

Päätösmatriiseja on luonnollista ajatella staattisessa tilanteessa, jossa ensin tehdään päätös a_i ja sitten sattuu skenaario s_j todennäköisyydellä p_j, jonka seurauksena saadaan palkkio R_{ij}. Usein päätöstilanteeseen kuitenkin kuuluu **dynamiikkaa ja syy-seuraussuhteita**:

- Skenaarion s_j todennäköisyys p_j voi riippua päätöksestä a_i.
- Skenaario s_j voi tulla jopa mahdottomaksi, jos on tehty päätös a_i.
- Päätös a_i voi luoda uusia skenaarioita s_j uusilla todennäköisyyksillä p_j.

On mahdollista esittää yleinen formaali tekniikka, joka ottaa edella mainitut dynaamiset ilmiöt huomioon. Sen esittäminen johtaisi kuitenkin hirvittävään symbolisekamelskaan, joten esitämme tässä vain puoliformaalin esimerkin **päätöspuun** avulla.



Staattinen päätöspuu vasemmalla ja dynaaminen päätöspuu oikealla.

Yllä olevassa kuvassa on vasemmalla staattinen päätöspuu. Siinä on aluksi päätössolmu (keltainen neliö). Päätöksentekijä valitsee haaran (päätöksen) a_1 tai a_2. Riippumatta siitä kumman päätöksen päätöksentekijä on valinnut, valitsee Fortuna yhden kolmesta skenaariosta todennäköisyyksin p_1, p_2, p_3 (punaiset ympyrät), ja lopputulemana saadaan palkkiot (vihreät kolmiot) r_{ij}. Tässä puussa todennäköisyydet eivät riipu päätoksentekijän valinnoista, eivätkä skenaariotkaan. Palkkiot toki riippuvat, muutenhan päätöksenteossa ei olisi mitään ongelmaa.

Vasemmanpuoleista päätöspuuta vastaa päätösmatriisi

	Skenaario (tn)		
Päätös	s_1 (p_1)	s_2 (p_2)	s_3 (p_3)
a_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
a_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}

Edellisessä kuvassa oikealla on dynaaminen päätöspuu. Siinä skenaariot ja niiden todennäköisyydet riippuvat päätöksistä, jotka on tehty aikaisemmin. Jos esimerkiksi aluksi tehtiin päätös a_1, niin seuraavaksi Fortuna arpoo meille palkkiot r_{11}, r_{12} ja r_{13} todennäköisyyksin p_{11}, p_{12} ja p_{13}, ja peli loppuu. Tässä siis sekä todennäköisyydet että palkkiot riippuivat tehdystä valinnasta a_1. Jos taas valitsimme aluksi päätöksen a_2, niin peli muuttuu monimutkaisemmaksi. Nyt Fortuna arpoo kolmen skenaarion s_{21}, s_{22} ja s_{23} välillä todennäköisyyksin p_{21}, p_{22} ja p_{23}, jotka siis riippuvat tehdystä valinnasta a_2. Skenaarion s_{22} tai s_{23} sattuessa peli loppuu ja saamme palkkon r_{22} tai r_{23}. Skenaarion s_{21} sattuessa pallo siirtyy takaisin päätöksentekijälle ja peli jatkuu. Nyt on valittavana kaksi vaihtoehtoa: a_{211} ja a_{212}. Molemmissa vaihtohdoissa pallo palautuu Fortunalle, joka arpoo kahden vaihtoehdon välillä kuitenkin niin, että sekä todennäköisyydet että palkkiot riippuvat kumpi valinnoista, a_{211} vai a_{212} tehtiin aiemmin. Tämän jälkeen peli loppuu.

Palkkiomatriisin rakentaminen dynaamisesta päätöspuusta onnistuu periaatteessa käymällä kaikki puun haarat läpi jossakin järjestyksessä. Olennaista on huomata, että kaikki lehdet vastaavat joitakin palkkioita ja kaikki tavat valita reitti puun läpi (keltaiset neliöt valitaan, punaisia ympyröitä ei) vastaavat päätöksiä.

Käymme nyt puun läpi juuresta lehtiin ylhäältä alas. Ensimmäinen päätös on valita a_1. Tämän jälkeen ei ole valintoja, vaan päädymme palkkioihin. Toinen päätös on valita a_2. Tästä voi seurata lisäpäätökset a_{211} ja a_{212}, riippuen siitä, kuinka Fortuna pelaa. Kaikki mahdolliset päätökset ovat jossitteluperiaatteen nojalla

$\tilde{a}_1$ = Valitaan a_1.
$\tilde{a}_2$ = Valitaan ensin a_2 ja sitten valitaan (potentiaalisesti) a_{211}.
$\tilde{a}_3$ = Valitaan ensin a_2 ja sitten valitaan (potentiaalisesti) a_{212}.

Skenaarioita on nyt periaatteessa yhtä monta kuin puussa on lehtiäkin (tosin joskus voimme vähentää skenaarioiden lukumäärää, kuten esimerkiksi vasemmanpuoleisessa puussa tapahtui). Meillä on siis periaatteessa 9 eri skenaariota. Tosin riippuen päätöksistä, jotkin skenaarioista eivät ole mahdollisia, vaan ne pitää tulkita potentiaalisina skenaarioina. Periaatteessa meillä on siis 9 eri skenaariota, jotka luettelemme ylhäältä alas ja merkitsemme niitä symboleilla $\tilde{s}_j$. Tällöin siis esimerkiksi palkkiolehteä r_{2122} vastaa skenaario $\tilde{s}_7$. Skenaarioiden todennäköisyydet saadaan kertomalla sitä vastaan haaran (ehdolliset) todennäköisyydet keskenään. Siten esimerkiksi palkkiota r_{2111} vastaavan skenaarion s_{2111} todennäköisyys on

$$\mathbb{P}[s_{2111}] \;=\; p_{21}\, p_{2111},$$

eikä suinkaan p_{2111}, kuten kuvan numeroinnista voisi helposti väärin päätellä. Merkitsemme skenaarioiden $\tilde{s}_j$ todennäköisyyksiä symbolein $\tilde{p}_j$. Tällöin siis esimerkiksi

$$\begin{aligned} \tilde{p}_7 &= \mathbb{P}[\tilde{s}_7] \\ &= \mathbb{P}[s_{2122}] \\ &= p_{21}p_{2122}. \end{aligned}$$

Mahdolliset skenaariot eri päätöksille ovat

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &\rightsquigarrow \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3 \\ \tilde{a}_2 &\rightsquigarrow \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, \tilde{s}_8, \tilde{s}_9 \\ \tilde{a}_3 &\rightsquigarrow \tilde{s}_6, \tilde{s}_7, \tilde{s}_8, \tilde{s}_9 \end{aligned}$$

Huomaamme heti valtavan ongelman. Kaikki skenaariot eivät ole mahdollisia kaikilla päätöksillä!

Oli miten oli, tällä tavalla raa'asti rakentamalla päädymme oikeanpuoleisesta päätöspuusta isoon "ylimääriteltyyn" palkkiomatriisiin

	Skenaario (tn)								
Päätös	$\tilde{s}_1$ ($\tilde{p}_1$)	$\tilde{s}_2$ ($\tilde{p}_2$)	$\tilde{s}_3$ ($\tilde{p}_3$)	$\tilde{s}_4$ ($\tilde{p}_4$)	$\tilde{s}_5$ ($\tilde{p}_5$)	$\tilde{s}_6$ ($\tilde{p}_6$)	$\tilde{s}_7$ ($\tilde{p}_7$)	$\tilde{s}_8$ ($\tilde{p}_8$)	$\tilde{s}_9$ ($\tilde{p}_9$)
$\tilde{a}_1$	r_{11}	r_{12}	r_{13}	-	-	-	-	-	-
$\tilde{a}_2$	-	-	-	r_{2111}	r_{2112}	-	-	r_{22}	r_{23}
$\tilde{a}_3$	-	-	-	-	-	r_{2121}	r_{2122}	r_{22}	r_{23}

Tässä merkintä "-" tarkoittaa sitä, että skenaario ei ole mahdollinen. Erityisesti on myös huomattava, että skenaariot eivät ole varsinaisesti vaihtoehtoisia, eivätkä todennäköisyydet $\tilde{p}_j$ välttämättä summaudu ykköseksi; ainoastaan (riveittäin) mahdolliset skenaariot ovat vaihtoehtoisia ja niiden todennäköisyydet summautuvat ykköseksi.

Oli miten oli, kunhan vain puuttuvat arvot "-" jätetään asianmukaisella tavalla huomioimatta, voidaan ylimääritellyn palkkiomatriisin avulla asettaa päätöksille niiden arvot käyttämällä haluttua päätössääntöä ja analyysissä päästään eteenpäin. Joskus on myös järkevää käsitellä päätöstilanne useassa matriisissa. Yllä oleva ylimääritelty päätösmatriisi on luonnollista jakaa joko kahteen tai kolmeen alimatriisiin: kahteen niin että toisessa on vain päätös $\tilde{a}_1$ ja toisessa päätökset $\tilde{a}_2$ ja $\tilde{a}_3$, ja kolmeen niin että jokainen päätös käsitellään erillisessä matriisissa.

Luku 4

Päätösmatriisilaskentaa GNU Octavella

GNU Octaven asennus

GNU Octave on vapaa versio Matlabista. Sen saa ladattua osoitteesta

`https://octave.org/download`

ja sieltä löytyy myös ohjeita GNU Octaven asennukseen ja käyttöön. Näitä luentoja kirjoitettaessa viimeisin (vakaa) versio GNU Octavesta on 9.2.0. Uudemmat ja vanhemmat versiot toimivat mitä suurimmalla todennäköisyydellä tämän kurssin tarpeisiin nähden ongelmitta.

GNU Octavea voi myös käyttää netissä asentamatta sitä omalle koneelle osoitteessa

`https://octave-online.net/`.

Luennoija ei suosittele käyttämään Octavea online-tavalla tavalla, mutta online-tavalla sitä ainakin pääsee helposti kokeilemaan.

Jos GNU Octave on asennettu Windows-koneeseen, niin työpöydälle tai johonkin valikkoon pitäisi ilmestyä kaksi kuvaketta: Octave CLI ja Octave GUI. Luennoija suosittelee käyttämään Octave GUI:ta. Se on graafinen käyttöliittymä Octaveen (GUI = Graphical User Interface). Octave CLI (CLI = Command Line Interface) sopinee wanhan koulukunnan koodareille.

Luennoija ei tiedä mitään GNU Octaven asennuksesta macOS-koneisiin. Apuja löytynee täältä:

`https://wiki.octave.org/Octave_for_macOS`.

Linux-käyttäjät osannevat asentaa ohjelmistoja ilman ohjeita.

Tämä kurssi ei ole ohjelmointikurssi, eikä GNU Octaven käyttö ole pakollista. Harjoitustöissä saa käyttää itselleen mukavinta työkalua. Luennoijan mielestä GNU Octave on tämän kurssin tarpeisiin ehkä paras työkalu. Ainoat Octaven viat ovat, että se on hieman hidas ja sen grafiikkarutiineissa on outoja ominaisuuksia, eli bugeja.

Octaven lisäksi muita mahdollsia työkaluja ovat Matlab, R, Python, Julia, Excel tai vaikkapa ihan vain kynä ja paperi.

Näiden luentojen Octavelle kirjoitetut m-tiedostot on suunniteltu niin, että niiden pitäisi toimia sellaisenaan myös Matlabissa. Luennoija ei ole tosin testannut asiaa ja ottaakin mielellään vastaan palautetta Matlab-käyttäjiltä.

Luennoija on viimeksi käyttänyt Exceliä viime vuosituhannella. Jos siis haluat tukea luennoijalta, käytä Octavea, tai yhtä hyvin Matlabia. Exceliin voi toki olla helposti saatavilla vertaistukea.

Jos joku käyttää Juliaa, niin luennoija on erittäin kiinnostunut näkemään miten se tomii tällä kurssilla. (Luennoija on kuullut Juliasta paljon hyvää.)

Funktio `pmatriisi` päätösmatriiseille

Alla oleva m-tiedosto `pmatriisi.m` määrittelee funktion

```
ptulos = pmatriisi(pongelma),
```

jonka avulla päätösmatriiseja voidaan ratkaista.

Funktio `pmatriisi` ottaa argumentikseen rakennetyyppisen (struct) muuttujan `pongelma`, joka määrittää päätösongelman. Muuttuja `pongelma` sisältää kentät:

`psaanto` on merkkijono, jonka määrää käytetyn päätössäännön. Vaihtoehdot ovat

`"opt"`	optimisti
`"pess"`	pessimisti
`"Hur"`	Hurwiczin sääntö
`"kk"`	katumuksen kaihtaja
`"Lap"`	Laplacen sääntö
`"oa"`	odotusarvosääntö
`"vara"`	hyödyn maksimoija olettaen vakio absoluuttinen riskiaversio

Kenttä `psaanto` on pakollinen. Huomattavaa on, että Octavelle isot ja pienet kirjaimet eivät ole (koskaan) samoja.

`pmat` on palkkiomatriisi, jonka rivit kuvaavat päätöksiä ja sarakkeet skenaarioita. Kenttä `pmat` on pakollinen.

`optaste` on Hurwiczin säännössä käytettävä optimismin aste. Kenttä on pakollinen ainoastaan Hurwiczin sääntöä käytettäessä.

`tn` on **pystyvektori**, joka sisältää skenaarioiden todennäköisyydet. Kenttä on pakollinen ainoastaan odotusarvosäännölle `"oa"` ja odotetun (vakio absoluuttisen riskiarversion) hyödyn maksimoijan säännölle `"vara"`.

`rtol` on riskitoleranssi hyödyn maksimoijan säännölle. Kenttä ei ole pakollinen muille säännöille kuin `"vara"`.

Funktio `pmatriisi` palauttaa rakennetyyppisen muuttujan `ptulos`, jossa on aina kentät

`parvot` joka sisältää eri päätösten arvot.

`poptimi` joka kertoo optimaalisen päätöksen indeksin.

Lisäksi, jos päätössääntö oli `"kk"` palautetaan myös katumusmatriisi kentässä, jonka nimi on `kmat`, ja jos päätössääntö oli `"vara"` palautetaan myös hyötymatriisi kentässä, jonka nimi on `hmat`.

Syy käyttää rakennetyyppisiä muuttujia on se, että Octavelle ei tarvitse määritellä rakenteen kaikkia kenttiä, jos ei niitä tarvitse. Myöskään ylimääräiset kentät eivät aiheuta ongelma: ne tulkitaan vain mukana roikkuvaksi roskaksi, johon ei kosketa kun ei kerran ole tarvetta.

Tässä on funktiotiedoston `pmatriisi.m` listaus:

```
function ptulos = pmatriisi(pongelma)
%% Funktio ptulos = pmatriisi(pongelma) palauttaa rakennemuuttujan ptulos, jonka
%% kentta parvot kertoo eri valintojen arvot ja kentta poptimi kertoo
%% optimaalisen paatoksen indeksin. Mikali paatossaanto on "kk", palauttaa
%% kentta kmat katumusmatriisin, ja mikali paatossaanto on "vara", palauttaa
%% kentta hmat hyotymatriisin.
```

```
%%
%% Argumentti pongelma on rakennemuuttuja, joka kuvaa paatosongelman. Sen kentat
%% ovat
%%
%% pmat on palkkiomatriisi.
%%
%% psaanto on merkkijono, joka kertoo paatossaannon.
%% Tuettuja saantoja ovat "opt", "pess", "Hur", "kk", "Lap", "oa", "vara".
%%
%% optaste on optimismin aste Hurwiczin saannossa.
%%
%% tn on pystyvektori skenaarioiden todennakoisyyksille.
%%
%% rtol on "vara"-saantoon liittyva riskitoleranssi.

    %% Lyhennysmerkintoja
    R = pongelma.pmat;      %% Palkkiomatriisi
    s = pongelma.psaanto;   %% paatossaanto
    I = 1:size(R,1);        %% R:n rivit
    J = 1:size(R,2);        %% R:n sarakkeet

    if strcmp(s,"opt")
        ptulos.parvot = max(R')';
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
    elseif strcmp(s,"pess")
        ptulos.parvot = min(R')';
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
    elseif strcmp(s,"Hur")
        w = pongelma.optaste;
        ptulos.parvot = w*max(R')' + (1-w)*min(R')';
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
    elseif strcmp(s,"kk")
        %% Rakennetaan katumusmatriisi
        for i=I
            for j=J
                K(i,j) = max(R(:,j)) - R(i,j);
            end
        end
        ptulos.parvot = max(K')';
        [roskaa, ptulos.poptimi] = min(ptulos.parvot);
        ptulos.kmat = K;
    elseif strcmp(s,"Lap")
        ptulos.parvot = (1/size(R,2))*sum(R')';
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
    elseif strcmp(s,"oa")
        p = pongelma.tn;
        ptulos.parvot = R*p;        %% p:n on oltava pystyvektori!
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
    elseif strcmp(s,"vara")
        p = pongelma.tn;
        r0 = pongelma.rtol;
        %% Rakennetaan hyotymatriisi.
        for i=I
            for j=J
                U(i,j) = 1 - exp(-R(i,j)/r0);
            end
        end
        ptulos.parvot = U*p;
```

```
        [roskaa, ptulos.poptimi] = max(ptulos.parvot);
        ptulos.hmat = U;
    end
end
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/pmatriisi.m

Funktion `pmatriisi` sisäinen toiminta selostetaan videoluennolla. Sen sisäistä toimintaa ei kuitenkaan tarvitse ymmärtää; riittää kun osaa käyttää sitä. Toisaalta sisäinen toiminta ei ole mitenkään erityisen monimutkaista ohjelmointimielessä, joten sen ymmärtäminen on kyllä suotavaa kenelle tahansa akateemiselle ihmiselle.

Seuraavissa osioissa näytämme esimerkkien avulla, kuinka päätösongelmia ratkaistaan funktiolla `pmatriisi`.

Lopuksi vielä **varoitus**: funktio `pmatriisi` on kirjoitettu periaatteella scheibaa sisään – scheibaa ulos. Se ei siis tarkista että käyttäjä on määritellyt rakennemuuttujan `pongelma` kunnolla tai edes järkevästi. Yleensä virheellisestä argumentista seuraa virheilmoitus, mutta on mahdollista että virheilmoitusta ei tule: tulos on vain scheibaa. Caveat emptor!

Funktion `pmatriisi` käyttö Reija Reippaan ja Yrjö Yhtä-Reippaan esimerkeissä

Tarkastelemme lukujen 1 ja 2 johdattelevia esimerkkejä funktion `pmatriisi` avulla.

Reija Reippaan päätös

Alla listattu m-tiedosto `esim_rr.m` voidaan ladata osoitteesta

https://uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_rr.m.

Tiedosto laskee Reija Reippaan optimipäätöksen, kun välimukavuusaste on 80 % ja päätössääntö on katumuksen kaihtaja. Varsinainen laskenta tapahtuu riveillä 10–20. Kaikki muu on joko lukemista helpottavaa kommentointia tai (lopuksi) tuloksen taltiointia.

Kyseessä on komentojonotiedosto (script file), ei siis funktiotiedosto, kuten `pmatriisi.m` oli. Teknisesti ero on se, että tiedosto `esim_rr.m` ei ala avainsanalla **function**, vaan muuttujasijoituksella `c = 0.8;` (kommenttimerkeillä “%” alkavat rivit ja tyhjät rivit Octave kylmästi sivuuttaa). Käytännön kannalta ero on se, että komentojonotiedosto ajetaan komentoikkunassa (kirjoittamalla sen nimi ilman .m-päätettä) rivi kerrallaan ihan kuin se olisi kirjoitettu sinne rivi kerrallaan. Funktiotiedostoa ei taas ajeta, vaan se määrittää funktion.

Funktiotiedoston nimi pitää olla sama kuin funktion, jonka se määrittää, nimi (.m-päätteen kera). Funktiotiedosto voi määrittää ainoastaan yhden funktion (ulkoiseen käyttöön). Komentojonotiedosto voi määrittää useita funktioita. Teknisessä mielessä siis komentojonotiedostot ovat yleistyksiä funktiotiedostoista. Niiden käyttötarkoitukset ovat toki erilaiset.

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %%
3 %% FILE: esim_rr.m
4 %%
5 %% Luvun 1 Reija Reipas esimerkin ratkaisu funktiolla pmatriisi.
6 %%
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
8
9 %% Valimukavuusaste
10 c = 0.8;
11
12 %% Palkkiomatriisi
13 R = [   1     0     0;
14         c     c     0;
15       1-c   1-c   1-c];
16
17 %% Paatosongelma rakennemuuttujaan po. Vain kentat psaanto ja pmat tarvitaan
18 po.pmat = R;
19 po.psaanto = "kk";
20 pr = pmatriisi(po)
21
22 %% Tiedoston ajo ja tuloste GNU Octaven komentorivilla:
23 %%>> esim_rr
24 %%pr =
25 %%
26 %%  scalar structure containing the fields:
27 %%
28 %%    parvot =
29 %%
30 %%       0.80000
31 %%       0.20000
32 %%       0.80000
33 %%
34 %%    poptimi =  2
35 %%    kmat =
36 %%
37 %%       0.00000    0.80000    0.20000
38 %%       0.20000    0.00000    0.20000
39 %%       0.80000    0.60000    0.00000
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_rr.m

Jos olet ladannut yllä listatun m-tiedoston GNU Octaven työhakemistoosi, saat ajettua sen kirjoittamalla tiedoston nimen ilman m-liitettä (`esim_rr`) komentoikkunaan (välilehti Command Window).

Voit halutessasi tarkastella, mitä Reija-Reippaan arvostuksille käy, kun muuttelet välimukavuusastetta c tiedoston rivillä 10. Tiedostoa voit editoida esimerkiksi GNU Octaven (GUI versio) välilehdellä Editor. Muista tallentaa muutoksesi (Control-S) ennen kuin ajat tiedoston komentoikkunassa.

Yrjö Yhtä-Reippaan päätös

Yrjö Yhtä-Reippaan esimerkki, komentojonotiedosto `esim_yyr.m` on listattu alla. Tiedoston voi ladata osoitteesta

https://uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_yyr.m

Varsinainen laskenta tapahtuu riveillä 10–20. Kaikki muu on joko lukemista helpottavaa kommentointia tai (lopuksi) tuloksen taltiointia.

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %%
3 %% FILE: esim_yyr.m
4 %%
```

```
%% Luvun 2 Yrjo Yhta-Reipas esimerkin ratkaisu funktiolla pmatriisi.
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Palkkiomatriisi
R = [ 1   1   0   0;
      0   0   1   0;
      0   1   0   1];
%% Skenaarioiden todennakoisyydet (pystyvektori)
p = [0.05  0.45  0.25  0.25]';

%% Paatosongelma rakennemuuttujaan po. Kentat psaanto, pmat ja tn tarvitaan
po.pmat = R;
po.psaanto = "oa";
po.tn = p;
pr = pmatriisi(po)

%% Tiedoston ajo ja tuloste
%%>> esim_yyr
%%pr =
%%
%%  scalar structure containing the fields:
%%
%%    parvot =
%%
%%       0.50000
%%       0.25000
%%       0.70000
%%
%%    poptimi = 3
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_yyr.m

Reijan ja Yrjön yhteispäätös

Reija Reippaan ja Yrjö Yhtä-Reippaan yhteinen päätös eri painoilla w on laskettu komentojonotiedostossa `esim_rryyr.m`, joka on listattu alla. Tiedoston voi ladata osoitteesta

https://uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_rryyr.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: esim_rryyr.m
%%
%% Luvun 2 Reijan ja Yrjon yhteisratkaisu eri w:n arvoilla kaytten funktiota
%% pmatriisi.
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Reijan ongelma ja skaalattu ratkaisu
c = 0.8;
RR = [  1     0     0;
        c     c     0;
       1-c   1-c   1-c];
poR.psaanto = "kk";
poR.pmat = RR;
prR = pmatriisi(poR);
```

```
VR = prR.parvot;
VR = -VR;
VR = skaalaus(VR);

%% Yrjon ongelma ja skaalattu ratkaisu
RY = [ 1   1   0   0;
       0   0   1   0;
       0   1   0   1];
p = [0.05  0.45  0.25  0.25]';
poY.psaanto = "oa";
poY.pmat = RY;
poY.tn = p;
prY = pmatriisi(poY);
VY = prY.parvot;
VY = skaalaus(VY);

%% Yhteispaatos painoilla w = 1...0 (valityksella 0.1)
w = 1:-0.1:0';
for i=1:length(w)
   V(:,i) = w(i)*VR + (1-w(i))*VY;
   [roskaa, yhtopt(i)] = max(V(:,i)');
end

%% Tiedoston ajo ja tuloste
%%>> esim_rryyr
%%>> yhtopt
%%yhtopt =
%%
%%   2   2   2   2   2   2   3   3   3   3   3
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_rryyr.m

Herkkyyden visualisointia (Sirpa Sijoittaja)

Sirpa Sijoittajalla on $c = 100\,000$ € ylimääräistä rahaa sijoitettavaksi. Sirpa ei usko hajauttamiseen, vaan haluaa kaikki munansa samaan koriin.

Sirpa sijoittaja valitsee yhden seuraavista valinnoista

a_1 = Sijoitetaan vähittäiskauppaan.
a_2 = Sijoitetaan vähittäiskaupan osto-optioihin.
a_3 = Sijoitetaan lentoyhtiöihin.
a_4 = Sijoitetaan lentoyhtiöiden osto-optioihin.

Sirpa arvelee seuraavien skenaarioiden olevan keskeisiä:

s_1 = Korona riehuu maailmalla valtoimenaan.
s_2 = Korona on saatu kuriin, mutta talous on lamassa.
s_3 = Korona on saatu kuriin ja taloudella menee hyvin.

Sirpa arvelee, etta todennäköisyydet ovat

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_0, \\
p_2 &= q_0, \\
p_3 &= q_0.
\end{aligned}
$$

Tässä siis p_0 on tuntematon parametri ja (pakostikin) $q_0 = (1 - p_0)/2$.

Sirpa on konsultoinut “sijoitusalan parhaimpia asiantuntijoita”, jotka ovat kertoneet Sirpalle eri sijoitusten tuottojen (prosentteina) eri skenaarioissa olevan

	Tuotto-% (tn)		
Valinta	s_1 (p_0)	s_2 (q_0)	s_3 (q_0)
a_1	80	−50	10
a_2	120	−100	−100
a_3	−60	20	200
a_4	−100	−100	400

Sirpa on riskin kaihtaja “vara”-tyyppisellä hyötyfunktiolla

$$u(r) \quad = \quad 1 - \mathrm{e}^{-r/r_0},$$

mutta ei ole aivan varma riskitoleranssistaan r_0.

Huomautus Koska Sirpa käyttää hyötysääntöä, ei hän voi laskea suoraan tuottoprosenteilla, vaan hänen on katsottava sijoituksensa (tai vielä paremmin, varallisuutensa) lopputulemia. Tosin sanoen hänen on tarkasteltava palkkiomatriisia

	Sijoituksen arvo (tn)		
Valinta	s_1 (p_0)	s_2 (q_0)	s_3 (q_0)
a_1	$1.8c$	$0.5c$	$1.1c$
a_2	$2.2c$	$0.0c$	$0.0c$
a_3	$0.4c$	$1.2c$	$3.0c$
a_4	$0.0c$	$0.0c$	$5.0c$

,

missä $c = 100\,000$€ on sijoitettava varallisuus.

Sirpa on ei osaa oikein arvioida koronatodennäköisyyttä p_0 eikä omaa riskitoleranssiaan r_0. Siispä hän tekee herkkyysanalyysin näiden parametrien suhteen. Sirpa Sijoittajan herkkyysanalyysi on m-tiedostossa, jonka voi ladata osoitteesta

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_sisi.m

ja se on myös listattu alle:

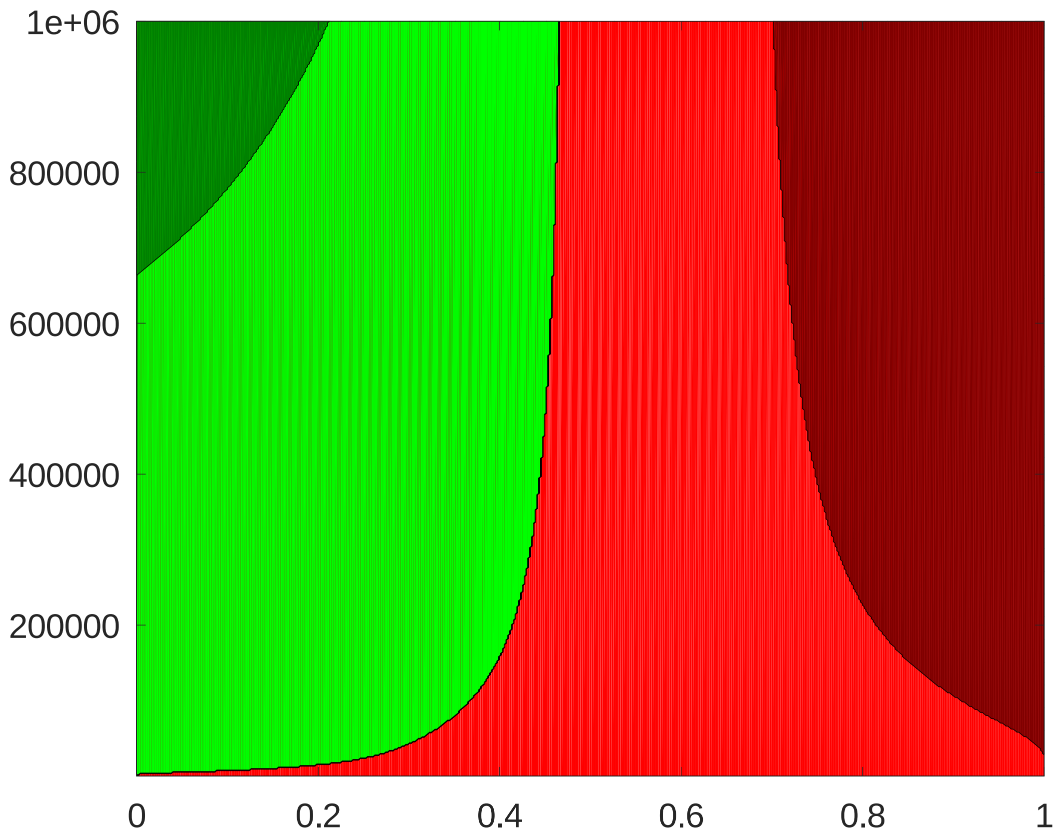
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: esim_sisi.m
%%
%% Sirpa Sijoittajalla on c euroa ylimaaraista rahaa.  Han pohdiskelee
%% seuraavien sijoitusvaihtoehtojen valilla:
%%
%%
%% Sirpa arvelee seuraavien skenaarioiden olevan keskeisia:
%%
%% s1 = Korona riehuu maailmalla valtoimenaan.
%% s2 = Korona on saatu kuriin, mutta talous on lamassa.
%% s3 = Korona on saatu kuriin ja taloudella menee hyvin.
%%
%% Sirpa arvelee, etta todennakoisyydet ovat
```

```
%%
%% p1 = p0.
%% p2 = q0.
%% p3 = q0.
%%
%% Tassa siis p0 on tuntematon parametri ja q0 = (1-p0)/2.
%%
%% Sirpa on odotetun hyodyn maksimoija "vara"-huotyfunktiolla, muttei ole varma
%% riskitoleranssistaan.
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Visualisointiin liittyvat laskut ja maaritykset
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Sijoitettava rahamaara ja palkkiomatriisi
c = 100000;
R = [ 1.8*c   0.5*c   1.1*c ;
      2.2*c   0.0*c   0.0*c ;
      0.4*c   1.2*c   3.0*c ;
      0.0*c   0.0*c   5.0*c ];
%% Palkkiomatriisi R on "sijoitusalan parhaiden asiantuntijoiden" nakemys.

%% Naytteiden lkm per parametri. Mita isompi N sita parempi kuva, mutta sita
%% kauemmin laskeminen kestaa.  Kun N=100 laskeminen kestaa noin 3 sekuntia ja
%% kun N=500 laskeminen kestaa noin minuutin.
N = 500;
p0arvot = linspace(0,1,N);              %% p0:n naytteet
r0arvot = linspace(1, 10*c ,N);         %% r0:n naytteet

po.pmat = R;                            %% Ei riipu herkkyysparametreista
po.psaanto = "vara";                    %% Ei riipu herkkyysparametreista
z = zeros(N);                           %% Alustus (ei tarpeellista)

%% Optimivalinnat eri parametrin arvoilla
for i = 1:N
    x = p0arvot(i);
    po.tn = [x (1-x)/2 (1-x)/2]';
    for j = 1:N
        y = r0arvot(j);
        po.rtol = y;
        pr = pmatriisi(po);
        z(j,i) = pr.poptimi;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Herkkyyskuvan piirto naytolle
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Varitetty z:n ylakuva arvoille otteistukselle x=p0arvot ja y=r0arvot.
contourf(p0arvot,r0arvot,z);

%% Akseleiden nimet ja niiden koot
set(gca, "fontsize", 22);
xlabel("p_0");
ylabel("r_0");
```

```
%% Itse varit kuvaan.
puna  = [1 0 0];
viher = [0 1 0];
colormap([puna; 0.5*puna; viher; 0.5*viher]);
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/esim_sisi.m

Ajamalla tiedosto `esim_sisi.m` näytteistysasteella $N = 500$ (kestää noin minuutin) saamme seuraavan kuvan Sirpa Sijoittajan herkkyyksistä riskitoleranssin (pystyakseli) ja koronatodennäköisyyden (vaaka-akseli) suhteista:



(Kuvan “taiteellisuus” johtuu jostakin Octaven käyttämän PDF-ajurin hämärästä toiminnasta. Se ei ollut tarkoituksellista, mutta suuri taide harvemmin on.)

Osa III

Esimerkkejä harjoitustöiden pohjaksi

Luku 5

Stefan Stuidun syksy 2021

Ongelman kuvaus

Stefan Stuidu on kolmannen vuoden tekniikan kandiopiskelija Vaasan yliopistossa. On marraskuu 2020 ja koronapandemian toinen aalto riehuu Suomessa ja maailmalla. Stefan arvelee valmistuvansa kandiksi keväällä 2021, ja nyt hän pohtii mitä tehdä syksyllä 2021. Stefanin suunnitteluhorisontti on elokuun 2022 loppu ja hän haluaa periaatteessa lyödä päätöksensä lukkoon nyt marraskuussa 2020; toki niin että jossittelulle on tarvittaessa tilaa.

Stefan Stuidu on päättänyt itselleen vaihtoehdot

a_1 = Opiskelijavaihto Kiinaan.
a_2 = Keskittyminen opintoihin.
a_3 = Opintoja ja ruokalähetin töitä iltaisin.
a_4 = Vähän opintoja ja päätyö isossa kv. yrityksessä.

Stefan Stuidu olettaa että seuraavat kolme binääristä tapahtumaa ovat merkittäviä hänen vaihtoehtojensa kannalta:

- Korona riehuu tai ei riehu.
- Yliopisto on etäopetuksessa tai normiopetuksessa.
- Maailman talous on lamassa tai maailman talous elpyy.

Periaatteessa näistä kolmesta tapahtumasta saadaan $2^3 = 8$ eri skenaariota. Koska voidaan kuitenkin olettaa yliopistojen olevan normiopetuksessa, jos korona on kukistettu, jäljelle jää 6 skenaariota:

s_1 = Korona riehuu, yliopisto etäopetuksessa ja maailma lamassa.
s_2 = Korona riehuu, yliopisto etäopetuksessa ja maailman talous elpyy.
s_3 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailma lamassa.
s_4 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailman talous elpyy.
s_5 = Korona kukistettu ja maailma lamassa.
s_6 = Korona kukistettu ja maailman talous elpyy.

Skenaarioiden todennäköisyydet ovat tuntemattoman koronatodennäköisyyden p_0

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0/4 \\ p_2 &= p_0/4 \\ p_3 &= p_0/4 \\ p_4 &= p_0/4 \\ p_5 &= (1-p_0)/2 \\ p_6 &= (1-p_0)/2. \end{aligned}$$

Nämä todennäköisyydet on siis rakennettu niin, että koronatodennäköisyys p_0 on tuntematon parametri ja ehdolliset todennäköisyydet koronaskenaarioille s_1, s_2, s_3, s_4 ovat yhtä suuret kuten myös ehdolliset todennäköisyydet koronavapaille skenaarioille s_5, s_6.

Päätösmatriisit

Stefan Stuidu päättää harrastaa monitavoiteoptimointia. Hänen mittaa palkkioitaan (tai rangaistuksiaan) kahdella tavalla:

- Lukuvuoden 2021–2022 aikana kertyneenä varallisuutena (palkkio).
- Jäljellä olevana oletettuna valmistumisaikana (rangaistus).

Näihin palkkioihin (ja rangaistuksiin) liittyy luonnollisesti paljon epävarmuutta, mutta Stefan Stuidu päättää luottaa analyysiinsä näiltä osin ja tarkastella epävarmuutta ainoastaan ongelman kuvauksessa esitettyjen skenaarioiden suhteen.

Stefan lähtee liikkeelle nolla-varallisuudella: hänellä ei säästöjä, muttei lainaakaan. Stefan ei myöskään maksa asumisestaan, sillä hän asuu puolisonsa kanssa omistusasunnossa. Stefanin puolisolla on riittävästi varallisuutta, jotta Stefan ei saa asumiseen yhteiskunnan tukia. Ainoat yhteiskunnan tuet, joihin Stefan on oikeutettu ovat opintoraha ja opintolainan valtiontakaus.

Stefan arvioi eri päätöksistä seuraavat varallisuusmuutokset eri skenaarioissa seuraavan taulukon mukaisesti (olemme ottaneet taulukon esityksessä pieniä taiteellisia vapauksia aiemmin esitettyyn standardiin). Taulukon arvot perustuvat mm. seuraaviin näkemyksiin:

- Laman aikana elinkustannukset vähenevät (monestakin syystä).
- Koronan aikaan elinkustannukset vähenevät.
- Kiinassa elämisen kulut ovat huomattavasti Suomea pienemmät. Kiinassa tosin pitää maksaa vuokraa, ja riippuu puolisosta voiko Suomen asunnon vuokrata.
- Kv. vientiyrityksen pahnanpohjimmaiset lomautetaan helpoiten.
- Työskentely kv. vientiyrityksessä aiheuttaa elintasokuluja.
- Koronan aikaan ruokaläheteillä on paljon töitä. Työt vielä lisääntyvät, jos korkeakoulut ovat etäopetuksessa.

Tarkemmin arviot käyvät ilmi liitteestä A.

	Korona/etäopetus/lama -todennäköisyydet					
Valinta	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$(1-p_0)/2$	$(1-p_0)/2$
Kiinaan vaihtoon	3633	3033	3633	3033	3333	3033
Opiskelua Suomessa	–567	–2967	–567	–2967	–1767	–2967
Ruokalähetiksi	8073	5673	3753	1353	393	–807
Päätöihin	–2850	3750	–2850	6000	450	10500

Varallisuuden lisäksi Stefan Stuidu perustaa päätöksensä odotettavissa olevaan valmistumisaikaan syksyllä 2022. Hän on päätynyt seuraaviin arvioihin:

	Korona/etäopetus/lama -todennäköisyydet					
Valinta	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$(1-p_0)/2$	$(1-p_0)/2$
Kiinaan vaihtoon	2	2	2	2	2	2
Opiskelua Suomessa	2	2	1	1	1	1
Ruokalähetiksi	2	2	2	2	2	2
Päätöihin	3	4	3	4	3	5

Päätössäännöt

Stefan Stuidu valitsee päätössäännökseen riskineutraalin odotusarvon maksimoinnin. Koska Stefan tarkastelee monitavoiteoptimointia, on hänen tuntemattoman koronatodennäköisyyden p_0 lisäksi määrättävä paino w, jolla hän yhdistää varallisuuteen ja valmistumisaikaan liittyvät arvofunktiot.

Stefan stuidu päättää aluksi tarkastella ongelmaa karkealla tasolla, jossa p_0 ja w saavat molemmat arvot 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 ja 1.00.

Olkoot $V^1(p_0)$ ja $V^2(p_0)$ varallisuuteen ja (maksimointimuotoinen) valmistumisaikaan liittyvät affiinisti välille $0 \ldots 1$ skaalatut arvofunktiot. Tällöin (katso liite A)

	$V^1(p_0)$ **kertynyt varallisuus**				
Valinta	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Kiinaan vaihtoon	0.70774	0.82684	**1.00000**	0.96528	0.78704
Opiskelua Suomessa	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Ruokalähetiksi	0.27544	0.49268	0.81127	**1.00000**	**1.00000**
Päätöihin	**1.00000**	**1.00000**	0.99730	0.74907	0.42892

ja

	$V^2(p_0)$ **opiskeluaikaa jäljellä**				
Valinta	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Kiinaan vaihtoon	0.66667	0.68182	0.70000	0.72222	0.75000
Opiskelua Suomessa	**1.00000**	**1.00000**	**1.00000**	**1.00000**	**1.00000**
Ruokalähetiksi	0.66667	0.68182	0.70000	0.72222	0.75000
Päätöihin	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Näemme välittömästi että arvot $V^1(p_0)$ ja $V^2(p_0)$ käyttäytyvät hyvin eri tavoin. On siis tarvetta herkkyysanalyysille. Ennen varsinaista herkkyysanalyysiä katsomme pikaisesti miltä tasapainoinen yhdistäminen

$$V(p_0, 0.50) \quad = \quad 0.50V^1(p_0) + 0.50V^2(p_0)$$

näyttää:

Valinta	$V(p_0) = 0.5V^1(p_0) + 0.5V^2(p_0)$ 0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Kiinaan vaihtoon	**0.68720**	**0.75433**	**0.85000**	0.84375	0.76852
Opiskelua Suomessa	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
Ruokalähetiksi	0.47106	0.58725	0.75563	**0.86111**	**0.87500**
Päätöihin	0.50000	0.50000	0.49865	0.37454	0.21446

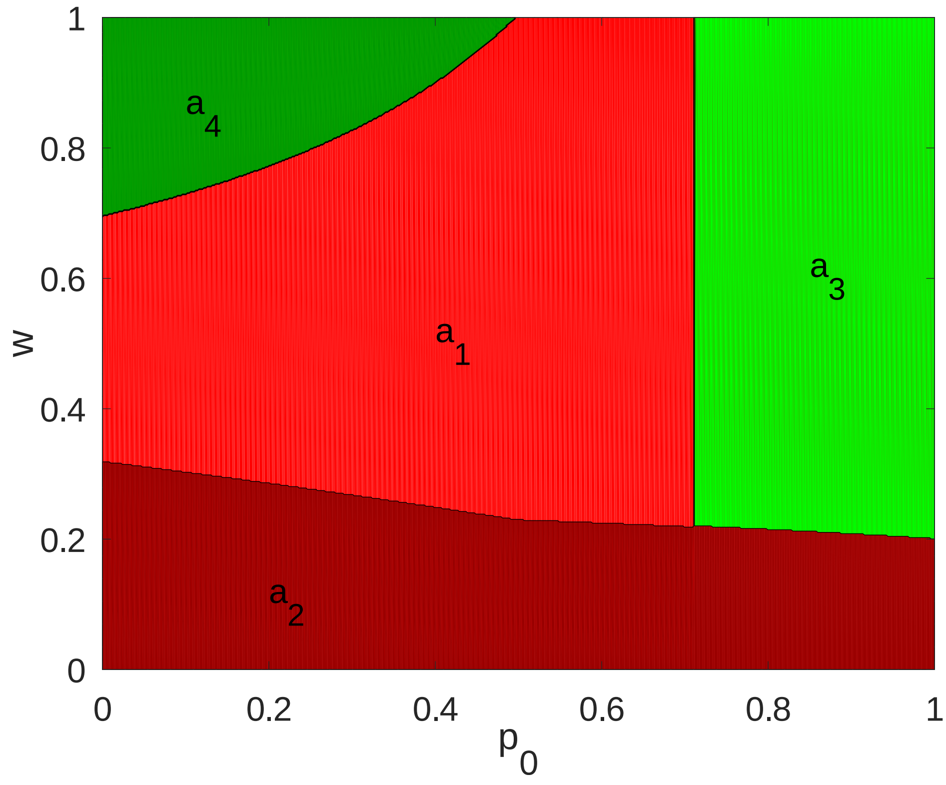
Herkkyysanalyysin tarve on ilmeinen.

Herkkyysanalyysi

Tarkastelemme Stefan Stuidun päätöstä

$$V(p_0, w) \quad = \quad wV^1(p_0) \; + \; (1-w)V^2(p_0)$$

kun parametrit p_0 ja w vaihtelevat. Saamme seuraavan kuvan (katso liite A, m-tiedosto `ss.m`):



Kuvassa vaaka-akselilla on koronatodennäköisyys p_0 ja pystyakselilla on varallisuusfunktion V^1 paino yhdistetyssä arvofunktiossa $V = wV^1 + (1-w)V^2$, missä V^2 on valmistumisajan arvofunktio. Päätökset on värikoodattu seuraavasti:

a_1 = Opiskelijavaihto Kiinaan (punainen).
a_2 = Keskittyminen opintoihin (tumman punainen).
a_3 = Opintoja ja ruokalähetin töitä iltaisin (vihreä).

a_4 = Vähän opintoja ja päätyö isossa kv. yrityksessä (tumman vihreä).

Mitä ilmeisimmin päätös on vaikea. Keksittyminen opintoihin a_2 näyttää hyvältä päätökseltä, jos valmistumisaika saa suuren painon (ei yllättävää), mutta muuten huonolta päätökseltä riippumatta koronatilanteesta. Opiskelijavaihto Kiinaan vaikuttaa hyvältä päätökseltä, jos koronatodennäköisyys ei ole suuren suuri (noin 70 %). Ruokalähetin toimi vaikuttaa hyvältä taloudellisesti, jos koronan riehuminen on erittäin todennäköistä. Päätöihin meneminen on hyvä valinta, jos koronan todennäköisyys on pieni, eikä opiskeluajan pituudelle anneta juurikaan painoa.

Urho Uraohjuksen päätös

Stefan Stuidun puoliso Urho Uraohjus päättää analysoida samaa päätösongelmaa kuin Stefan Stuidu. Erona on, että urho käyttää palkkioinaan arvioitua kuukausipalkkaansa kolmen vuoden päästä eli syksyllä 2023 ja päätössääntöinään odotuarvosääntöä sekä katumuksen kaihtamista.

Urhon herkkyysparametrit ovat w, joka kertoo kuinka odotusarvosääntö ja katumuksen kaihtajan sääntö yhdistetään, ja koronatodennäköisyys p_0.

Urho on arivoinut palkkiomatriisinsa (odotettu kuukausipalkka) olevan

	Kuukausipalkka syksyllä 2023					
	Korona/etäopetus/lama -todennäköisyydet					
Valinta	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$(1-p_0)/2$	$(1-p_0)/2$
Kiinaan vaihtoon	3000	3500	2800	3500	2800	3500
Opiskelua Suomessa	2500	2700	3300	3800	3500	4000
Ruokalähetiksi	3000	3200	2000	2500	2000	2500
Päätöihin	3000	3200	2500	4000	3000	3500

Palkkiomatriisin luvut perustuvat seuraaville näkemyksille:

- Pikainen valmistuminen nostaa palkkaa.
- Lama yleisesti ottaen laskee palkkaa.
- Opiskelijavaihto Kiinassa nostaa palkkaa, mutta pidentää opiskeluaikaa.
- Työkokemus kv. yrityksessä nostaa palkkaa, mutta pidentää opiskeluaikaa.
- Etäopetus sopii ruokalähetille hyvin.
- Etäopetus sopii opiskelijavaihtossa olijoille.
- Etäopetus sopii huonosti päätoimiseen opiskeluun.

Urho Uraohjuksen katumusmatriisi on

	Katumusmatriisi					
	Korona/etäopetus/lama -todennäköisyydet					
Valinta	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$p_0/4$	$(1-p_0)/2$	$(1-p_0)/2$
Kiinaan vaihtoon	0	0	500	500	700	500
Opiskelua Suomessa	500	800	0	200	0	0
Ruokalähetiksi	0	300	1300	1500	1500	1500
Päätöihin	0	300	800	0	500	500

Maksimaaliset kadutukset (raa’at sekä skaalatut) ovat siis

Valinta	Suurimmat kadutukset (skaalattu)	
Kiinaan vaihtoon	**700**	**(1.000)**
Opiskelua Suomessa	800	(0.875)
Ruokalähetiksi	1500	(0.000)
Päätöihin	800	(0.875)

Katumusta kaihtavan Urhon valinta on siis a_1=Opiskelijavaihtoon Kiinaan.

Odotusarvosääntöä varten Urho Uraohjus laskee alustavasti päätösfunktionsa $V^1(p_0)$ arvoja samalla tavalla kuin Stefan Stuidu p_0:n arvoille 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 ja 1.00. Hän saa skaalatut arvot (katso liite A)

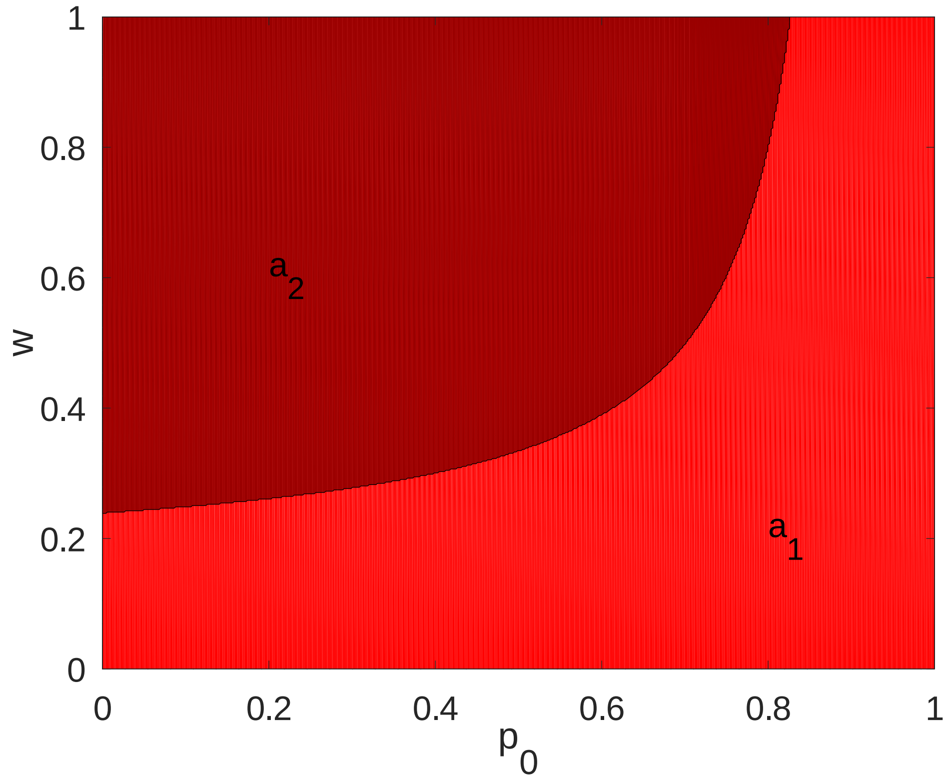
		$V^1(p_0)$	**kuukausipalkka**		
Valinta	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Kiinaan vaihtoon	0.60000	0.65816	0.75000	0.91667	**1.00000**
Opiskelua Suomessa	**1.00000**	**1.00000**	**1.00000**	**1.00000**	0.76190
Ruokalähetiksi	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Päätöihin	0.66667	0.71429	0.78947	0.92593	0.95238

Odotusarvosääntöä noudattavan Urhon valinta siis on a_2=Opiskelua Suomessa, jollei koronatodennäköisyys p_0 ole liian suuri, jolloin paras päätös näyttäisi olevan a_1=Opiskelijavaihtoon Kiinaan.

Lopuksi Urho Uraohjus tarkastelee kuvallisesti yhdistettyä arvofunktiota

$$V(p_0, w) \quad = \quad wV^1(p_0) \; + \; (1-w)V^2,$$

missä $V^1(p_0)$ on skaalattu odotusarvosäännön mukainen arvofunktio koronatodennäköisyyden p_0 vallitessa ja V^2 on (koronatodennäköisyydestä riippumaton) skaalattu maksimointimuotoinen katumuksen kaihtajan arvofunktio. Saamme seuraavan kuvan (katso liite A, m-tiedosto `uu.m`):



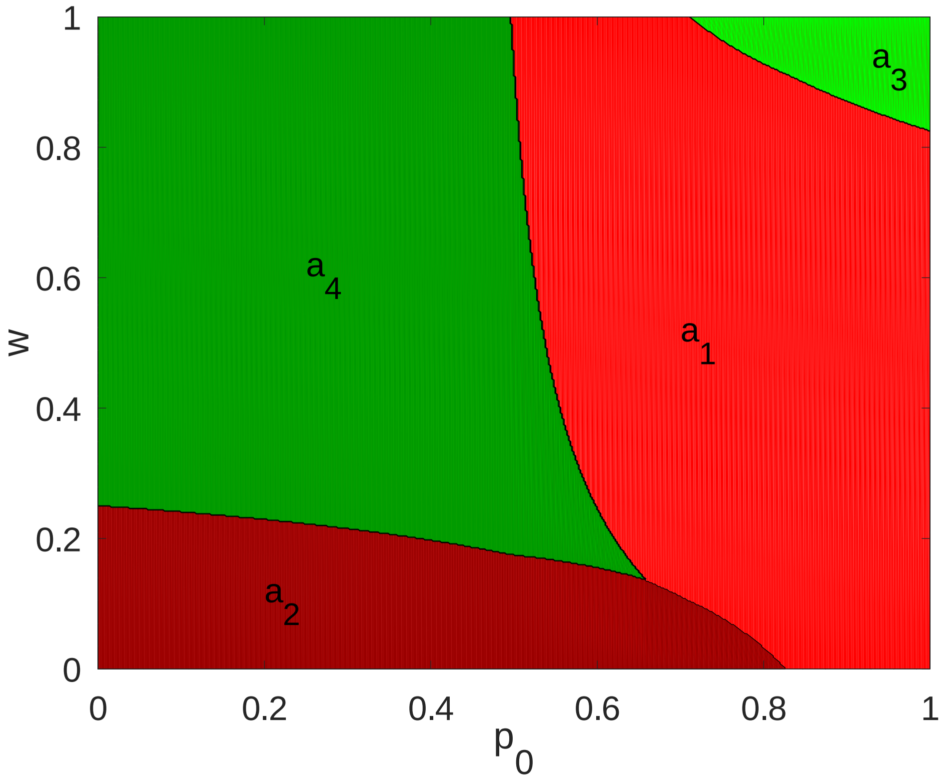
Kuvassa vaaka-akselilla on koronatodennäköisyys p_0 ja pystyakselilla odotettua kuukausipalkkaa vastaavan arvofunktion V^1 paino yhdistetyssä arvofunktiossa $V = wV^1 + (1-w)V^2$, missä V^2 on katumuksen kaihtamista vastaava arvofunktio. Päätökset on värikoodattu seuraavasti:

a_1 = Opiskelijavaihto Kiinaan (punainen).
a_2 = Keskittyminen opintoihin (tumman punainen).
a_3 = Opintoja ja ruokalähetin töitä iltaisin (vihreä).
a_4 = Vähän opintoja ja päätyö isossa kv. yrityksessä (tumman vihreä).

Yhdistetty herkkyysanalyysi ja lopullinen päätös

Stefan Stuidu ja Urho Uraohjus pyrkivät löytämään yhteisen sävelen. Koska kaksiulotteiset kuvat ovat luonnollisia, he päättävät tarkastella tilannetta kahden herkkyysparametrin suhteen. Luonnollisia parametreja ovat p_0 koronatodennäköisyydelle ja w joka kertoo kuinka paljon Stefanin näkemys painaa yhteispäätöksessä. Tätä varten sekä Stefanin että Urhon on määriteltävä arvofunktionsa $V(S;p_0)$ ja $V(U;p_0)$ jotka kertovat kuinka paljon he arvostavat mitäkin päätöstä a_1, a_2, a_3 ja a_4 koronatodennäköisyyden ollessa p_0.

Sekä Stefan että Urho päättävät molemmat painottaa omissa sisäisissä laskelmissaan omia sääntöjään tasapainoisesti ($w = 0.5$). Tällöin (katso liite A, m-tiedosto `ssuu.m`) saamme seuraavan kuvan:



Kuvassa vaaka-akselilla on koronatodennäköisyys p_0 ja pystyakselilla on Stefanin arvofunktion $V(S;p_0)$ paino yhdistetyssä arvofunktiossa

$$V(p_0, w) \quad = \quad wV(S;p_0) + (1-w)V(U;p_0),$$

missä $V(U;p_0)$ on Urhon arvofunktio. Päätökset on värikoodattu seuraavasti:

a_1 = Opiskelijavaihto Kiinaan (punainen).
a_2 = Keskittyminen opintoihin (keltainen).
a_3 = Opintoja ja ruokalähetin töitä iltaisin (vihreä).
a_4 = Vähän opintoja ja päätyö isossa kv. yrityksessä (ei kuvassa).

Opuskelijavaihto Kiinaan a_1 näyttää oikealta valinnalta suurimmassa osassa parametrien p_0 ja w arvoja. Jos annetaan kaikki paino Urholle ja pidetään Oliopoliopandemian todennäköisyyttä kohtalaisen pienenä, niin tällön valinta a_2, keskittyminen opintoihin on optimaalinen valintaa. Vastaavasti jos painotetaan Stefanin valintaa ja pidetään Oliopoliopandemiaa kohtalaisen varmana, kannattaa valita a_3: opintoja ja ruokalähetin töitä. Valinta a_4, vähän opintoja ja päätyö isossa kv. yrityksessä ei ole koskaan optimaalinen valinta Stefanin ja Urhon yhteisvalintaongelmassa.

Liite A: Laskelmat

Varoitus Vastoin hyvää tapaa sama data esiintyy useassa eri tiedostossa. Tällä tavalla tietysti kerjäämme ikävyyksiä, mutta toisaalta m-tiedostomme ovat “itsenäisiä”.

Alla m-tiedosto Stefan Stuidun laskuille.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: ss.m
%%
%% Stefan Stuidu miettii marraskuussa 2020 mita tehda
%% syyskuu 2021-elokuu 2022
%%
%% Han on paattanyt vaihtoehdot
%%
%% a1 = Opiskelijavaihto Kiinaan
%% a2 = Keskittyminen opintoihin
%% a3 = Opintoja ja ruokalahetin toita iltaisin
%% a4 = Vahan opintoja ja paatyo isossa kv. yrityksessa
%%
%% Seuraavat skenaariot ovat Stefanin mielesta keskeisia
%%
%% s1 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailma lamassa
%% s2 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s3 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailma lamassa
%% s4 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s5 = Korona kukistettu ja maailma lamassa
%% s6 = Korona kukistettu ja maailman talous elpyy
%%
%% Skenaarioiden todennakoisyydet ovat tuntemattoman koronatodennakoisyyden p0
%% funktioina
%%
%% p1 = p0/4
%% p2 = p0/4
%% p3 = p0/4
%% p4 = p0/4
%% p5 = (1-p0)/2
%% p6 = (1-p0)/2
%%
%% Koronatodennakoisyys p0 on herkkyysparametri.
%%
%% Stefan perustaa paatoksensa odotusarvosaannolle seka kahdelle palkkiolle:
%%
%% - Varallisuuden/lainan maara syksylla 2022
%% - Jaljella olevat opiskeluvuodet syksylla 2022
%%
%% Palkkiot oletetaan (hieman eparealistisesti) tunnetuiksi.
%%
%% Palkkioita vastaavien odotusarvosaantojen yhdistamispaino w on herkkyys-
%% parametri.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Paatosmatriisit
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Vuoden aikana kertynyt varallisuus/laina.

or = 12*252.76;       %% Opintoraha
os = 5000;            %% Opiskelijavaihtostipendi Kiinaan
km = 2000;            %% Kiinan muuttokustannukset
ms = 12*500;          %% Elamisen kulut Suomessa
mk = 12*250;          %% Elamisen kulut Kiinassa

```

```
tk = or+os-km;        %% Opiskelijan tulot Kiinassa
ts = or;              %% Opiskelijan tulot Suomessa

rl = 12*200*0.9;      %% Ruokalahetin "nettoperuspalkka"
pt = 12*2500*0.75;    %% Paatyon "nettoperuspalkka" kun vienti vetaa

R1 = [
tk-0.8*mk        tk-mk        tk-0.8*mk        tk-mk        tk-0.9*mk        tk-mk    ;
ts-0.6*ms        ts-ms        ts-0.6*ms        ts-ms        ts-0.8*ms        ts-ms    ;
ts+4*rl-0.6*ms   ts+4*rl-ms   ts+2*rl-0.6*ms   ts+2*rl-ms   ts+rl-0.8*ms     ts+rl-ms;
0.3*pt-1.6*ms    0.7*pt-2*ms  0.3*pt-1.6*ms    0.8*pt-2*ms  0.5*pt-1.8*ms    pt-2*ms  ;
];

%% Jaljella oleva valmistumisaika syksylla 2022 (tavoiteaika on yksi vuosi!!!)

R2 = [
2 2 2 2 2 2;
2 2 1 1 1 1;
2 2 2 2 2 2;
3 4 3 4 3 5;
];

R2 = -R2;         %% Maksimointimuoto!

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Pienehkot taulukot, kun p0 vaihtelee ja w=0.5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% p0 otteistukset.
p0arvot = 0:0.25:1;

%% Paatosongelmien vakiokentat
po1.pmat = R1;
po1.psaanto = "oa";
po2.pmat = R2;
po2.psaanto = "oa";

%% Skaalatut paatosarvot V1 ja V2, kun p0 vaihtelee.
for i = 1:length(p0arvot)
    p = [
          p0arvot(i)/4;
          p0arvot(i)/4;
          p0arvot(i)/4;
          p0arvot(i)/4;
          (1-p0arvot(i))/2;
          (1-p0arvot(i))/2
         ];
    po1.tn = p;
    po2.tn = p;
    pr1 = pmatriisi(po1);
    pr2 = pmatriisi(po2);
    V1(:,i) = skaalaus(pr1.parvot);
    V2(:,i) = skaalaus(pr2.parvot);
end

%% Arvojen tasapainoinen (w=0.5) yhdistaminen, kun p0 kay lapi p0arvot.
V = 0.5*V1 + 0.5*V2;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Visualisointi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Otteistustaajuus. Mita isompi sen parempi, mutta laskeminen kestaa.
%% Jos N=500 laskeminen kestaa noin 4 sekuntia.
N=500;

%% Laskut
p0arvot = linspace(0,1,N);
warvot = linspace(0,1,N);
z = zeros(N);

for i=1:length(p0arvot)
    p0 = p0arvot(i);
    q0 = 1-p0;
    po1.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
    po2.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
    pr1 = pmatriisi(po1);
    pr2 = pmatriisi(po2);
    v1 = skaalaus(pr1.parvot);
    v2 = skaalaus(pr2.parvot);
    for j=1:length(warvot)
        w = warvot(j);
        v = w*v1 + (1-w)*v2;
        [roskaa, z(j,i)] = max(v);
    end
end

%% Itse kuva
contourf(p0arvot, warvot, z)
set(gca, "fontsize", 24);
xlabel("p_0")
ylabel("w")
puna  = [1 0 0];
viher = [0 1 0];
colormap([puna; 0.6*puna; viher; 0.6*viher])

%% Tekstit manuaalisesti. Arvot katsottu matriisista z (kun N=10). Huomaa etta
%% y-akseli on kaanteinen.
text(0.40,0.50,"a_1", "fontsize",24)
text(0.20,0.10,"a_2", "fontsize",24)
text(0.85,0.60,"a_3", "fontsize",24)
text(0.10,0.85,"a_4", "fontsize",24)
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/ss.m

Alla m-tiedosto Urho Uraohjuksen laskuille.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: uu.m
%%
%% Stefan Stuidun puoliso Urho Uraohjus miettii marraskuussa 2020 mita tehda
%% syyskuu 2021-elokuu 2022
%%
%% Han on paattanyt analysoida Stefan Stuidun vaihtoehdot
%%
```

```
%% a1 = Opiskelijavaihto Kiinaan
%% a2 = Keskittyminen opintoihin
%% a3 = Opintoja ja ruokalahetin toita iltaisin
%% a4 = Vahan opintoja ja paatyo isossa kv. yrityksessa
%%
%% Seuraavat skenaariot olivat Stefanin mielesta keskeisia
%%
%% s1 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailma lamassa
%% s2 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s3 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailma lamassa
%% s4 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s5 = Korona kukistettu ja maailma lamassa
%% s6 = Korona kukistettu ja maailman talous elpyy
%%
%% Skenaarioiden todennakoisyydet ovat tuntemattoman koronatodennakoisyyden p0
%% funktioina
%%
%% p1 = p0/4
%% p2 = p0/4
%% p3 = p0/4
%% p4 = p0/4
%% p5 = (1-p0)/2
%% p6 = (1-p0)/2
%%
%% Koronatodennakoisyys p0 on herkkyysparametri.
%%
%% Urho perustaa paatoksensa odotusarvosaannolle ja katumuksen kaihtajan
%% saannolle seka palkkiolle kuukausipalkka kolmen vuoden paasta (syksy 2023)
%%
%% Palkkiot oletetaan (varsin eparealistisesti) tunnetuiksi.
%%
%% Odotusarvosaannon ja katumuksen kaihtajan saannon yhdistamispaino w on
%% herkkyysparametri.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Paatosmatriisi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

R = [
3000  3500  2800  3500  2800  3500;  %% Kiinaan
2500  2700  3300  3800  3500  4000;  %% opintoja
3000  3200  2000  2500  2000  2500;  %% ruokalahetti
3000  3200  2500  4000  3000  3500;  %% paatyot
 ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Pienehko taulukko p0 herkkyyksille.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% p0 ja w otteistukset
 p0arvot = 0:0.25:1;
 warvot = 0:0.25:1;

%% Paatosongelmien vakiokentat
po1.pmat = R;
po1.psaanto = "oa";
po2.pmat = R;
po2.psaanto = "kk";
```

```
%% Skaalattu paatossaanto V2
pr2 = pmatriisi(po2);
V2 = -pr2.parvot;       %% Maksimointimuoto
V2 = (V2-min(V2))/(max(V2)-min(V2));

%% Skaalattu paatokset V1
for i = 1:length(p0arvot)
    p = [
         p0arvot(i)/4;
         p0arvot(i)/4;
         p0arvot(i)/4;
         p0arvot(i)/4;
         (1-p0arvot(i))/2;
         (1-p0arvot(i))/2
        ];
    po1.tn = p;
    pr1 = pmatriisi(po1);
    V1(:,i) = pr1.parvot;
    V1(:,i) = (V1(:,i) - min(V1(:,i)))/(max(V1(:,i))-min(V1(:,i)));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Visualisointi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Otteistustaajuus.  Mita isompi sen parempi, mutta laskeminen kestaa.
%% Jos N=500 laskeminen kestaa noin 20 sekuntia.
N=500;

%% Laskut
p0arvot = linspace(0,1,N);
warvot = linspace(0,1,N);
z = zeros(N);

for i=1:length(p0arvot)
    for j=1:length(warvot)
        p0 = p0arvot(i);
        w = warvot(j);
        q0 = 1-p0;
        po1.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
        pr1 = pmatriisi(po1);
        v1 = pr1.parvot;
        v1 = (v1-min(v1))/(max(v1)-min(v1));
        v = w*v1 + (1-w)*V2;
        [roskaa, z(j,i)] = max(v);
    end
end

%% Itse kuva
contourf(p0arvot, warvot, z)
set(gca, "fontsize", 24);
xlabel("p_0")
ylabel("w")
puna  = [1 0 0];
viher = [0 1 0];
colormap([puna; 0.6*puna; viher; 0.6*puna])
text(0.80,0.20,"a_1", "fontsize",24)
```

```
text(0.20,0.60,"a_2", "fontsize",24)
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/uu.m

Alla m-tiedosto Stefan Stuidun ja Urho Uraohjuksen yhteisherkkyysanalyysille.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: ssuu.m
%%
%% Stefan Stuidun ja Urho Uraohjuksen yhteisherkkyysanalyysi
%%
%% Vaihtoehdot
%%
%% a1 = Opiskelijavaihto Kiinaan
%% a2 = Keskittyminen opintoihin
%% a3 = Opintoja ja ruokalahetin toita iltaisin
%% a4 = Vahan opintoja ja paatyo isossa kv. yrityksessa
%%
%% Skenaariot
%%
%% s1 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailma lamassa
%% s2 = Korona riehuu, yliopisto etaopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s3 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailma lamassa
%% s4 = Korona riehuu, yliopisto normiopetuksessa ja maailman talous elpyy
%% s5 = Korona kukistettu ja maailma lamassa
%% s6 = Korona kukistettu ja maailman talous elpyy
%%
%% Skenaarioiden todennakoisyydet ovat tuntemattoman koronatodennakoisyyden p0
%% funktioina
%%
%% p1 = p0/4
%% p2 = p0/4
%% p3 = p0/4
%% p4 = p0/4
%% p5 = (1-p0)/2
%% p6 = (1-p0)/2
%%
%% Koronatodennakoisyys p0 on herkkyysparametri.
%%
%% Stefainin ja Urhon nakemysten yhdistamispaino w on herkkyysparametri.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Paatosmatriisit
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Vuoden aikana kertynyt varallisuus/laina.

or = 12*252.76;      %% Opintoraha
os = 5000;           %% Opiskelijavaihtostipendi Kiinaan
km = 2000;           %% Kiinan muuttokustannukset
ms = 12*500;         %% Elamisen kulut Suomessa
mk = 12*250;         %% Elamisen kulut Kiinassa

tk = or+os-km;       %% Opiskelijan tulot Kiinassa
ts = or;             %% Opiskelijan tulot Suomessa

rl = 12*200*0.9;     %% Ruokalahetin "nettoperuspalkka"
```

```
pt = 12*2500*0.75;   %% Paatyon "nettoperuspalkka" kun vienti vetaa

RS1 = [
tk-0.8*mk        tk-mk         tk-0.8*mk        tk-mk         tk-0.9*mk       tk-mk     ;
ts-0.6*ms        ts-ms         ts-0.6*ms        ts-ms         ts-0.8*ms       ts-ms     ;
ts+4*rl-0.6*ms   ts+4*rl-ms    ts+2*rl-0.6*ms   ts+2*rl-ms    ts+rl-0.8*ms    ts+rl-ms;
0.3*pt-1.6*ms    0.7*pt-2*ms   0.3*pt-1.6*ms    0.8*pt-2*ms   0.5*pt-1.8*ms   pt-2*ms  ;
];

%% Jaljella oleva valmistumisaika syksylla 2022 (tavoiteaika on yksi vuosi!!!)

RS2 = [
2 2 2 2 2 2;
2 2 1 1 1 1;
2 2 2 2 2 2;
3 4 3 4 3 5;
];

RS2 = -RS2;          %% Maksimointimuoto!

%% Odotettu kuukausipalkka

RU = [
3000  3500  2800  3500  2800  3500;  %% Kiinaan
2500  2700  3300  3800  3500  4000;  %% opintoja
3000  3200  2000  2500  2000  2500;  %% ruokalahetti
3000  3200  2500  4000  3000  3500;  %% paatyot
];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Visualisointi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Paatosongelmien vakiokentat (eivat riipu p0:sta eivatka w:sta).
poS1.pmat = RS1;
poS1.psaanto = "oa";
poS2.pmat = RS2;
poS2.psaanto = "oa";

poU1.pmat = RU;
poU1.psaanto = "oa";
poU2.pmat = RU;
poU2.psaanto = "kk";

%% Urhon katumuksen kaihtaminen ei riipu p0:sta (eika w:sta).  Voidaan laskea
## valmiiksi
prU2 = pmatriisi(poU2);
VU2 = prU2.parvot;
VU2 = -VU2;                    %% Katumuksen kaihtainen on minimointimuoto.
VU2 = skaalaus(VU2);


%% Otteistustaajuus.  Mita isompi sen parempi, mutta laskeminen kestaa.
%% Jos N=500 laskeminen kestaa noin 4 sekuntia.
N = 500;

%% Laskut
p0arvot = linspace(0,1,N);
```

```
warvot = linspace(0,1,N);
z = zeros(N);

for i=1:length(p0arvot)
    p0 = p0arvot(i);
    q0 = 1-p0;
    poS1.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
    poS2.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
    poU1.tn = [p0/4 p0/4 p0/4 p0/4 q0/2 q0/2]';
    prS1 = pmatriisi(poS1);
    prS2 = pmatriisi(poS2);
    prU1 = pmatriisi(poU1);
    %% prU2 on laskettu rivilla 99.
    VS1 = skaalaus(prS1.parvot);
    VS2 = skaalaus(prS2.parvot);
    VS = 0.5*VS1 + 0.5*VS2;
    VS = skaalaus(VS);
    VU1 = skaalaus(prU1.parvot);
    VU = 0.5*VU1 + 0.5*VU2;
    VU = skaalaus(VU);
    for j=1:length(warvot)
        w = warvot(j);
        V = w*VS + (1-w)*VU;
       [roskaa, z(j,i)] = max(V);
    end
end

%% Itse kuva
contourf(p0arvot, warvot, z)
set(gca, "fontsize", 24);
xlabel("p_0")
ylabel("w")
puna  = [1 0 0];
kelta = [1 1 0];
viher = [0 1 0];
colormap([puna; kelta; viher])
%% a1 = puna
%% a2 = tumma puna
%% a3 = viher
%% a4 = tumma viher
text(0.70,0.50,"a_1", "fontsize",24)
text(0.08,0.08,"a_2", "fontsize",24)
text(0.92,0.92,"a_3", "fontsize",24)
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/ssuu.m

Luku 6

Eeva Evan tieteellinen selonteko

Ongelman kuvaus

Eeva Eva on talouseliitin kätyri. Koronapandemiassa hän näkee pelin paikan ja päättää julkaista tieteellisen selonteon siitä, kuinka Suomi selviää kriisistä parhaalla mahdollisella tavalla kuitenkin niin, että hänen sidosryhmänsä menestyvät vielä parhaammalla mahdollisella tavalla.

Tässä luvussa käytämme siis päätösmatriisitekniikka vähemmän rehellisellä tavalla: olemme päättäneet mitä haluamme ja sitten rakennamme analyysimme niin, että se tukee päätöstämme. Varsinainen huiputus paljastetaan Liitteessä B: salainen lisäpöytäkirja.

Eeva päättää tarkastella seuraavia vaihtoehtoisia politiikkoja Suomelle vuodelle 2022 (koska politiikan läpivienti ja jalkauttaminen vie aikaa, ei tarkastella vuotta 2021):

a_1 = Erittäin vapaa politiikka.
a_2 = Vapaa politiikka.
a_3 = Nykyinen politiikka.
a_4 = Sääntö- & kuripolitiikka.
a_5 = Äärimmäinen sääntö- & kuripolitiikka.

Vaihtoehto a_1 on "erittäin vapaa" siinä mielessä, että se tarkoittaa sääntöjen ja normien purkua, minimaalisia koronarajoitteita, alempaa veroastetta ja kaikkea muuta liberaalia menoa. Vaihtoehto a_5 on puolestaan "äärirajoittava" siinä mielessä, että se tarkoittaa voimakkaasti säänneltyä taloudellista ja muuta toimintaa, ankaria koronarajoitteita, korkeampaa veroastetta ja kaikkea muuta sosiaalisesti vastuullista menoa. Jos tämä olisi todellinen "tieteellinen" selonteko, näitä vaihtoehtoja avattaisiin seikkaperäistesti ja niihin sijoitettaisiin joitakin "pommeja", mutta näin opetusmateriaalissa jätämme yksityiskohdat lukijan mielikuvituksen varaan.

Palkkiomatriisina tulee olemaan Suomen talouden kehitys (täsmällisemmin BKT-muutos prosentteina). Tähän liittyy keskeisesti kaksi epävarmuutta:

- Onko koronapandemia saatu rauhoitettua?
- Vetääkö Suomen vienti?

Näistä saadaan seuraavat neljä skenaariota:

s_1 = Korona aisoissa ja vienti vetää.
s_2 = Korona aisoissa, mutta vienti tökkii.
s_3 = Korona riehuu, mutta vienti vetää.
s_4 = Korona riehuu ja vienti tökkii.

Harrison–Stetson -arviot näiden skenaarioiden todennäköisyyksiksi ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.75p_0, \\ p_2 &= 0.25p_0, \\ p_3 &= 0.25q_0, \\ p_4 &= 0.75q_0, \end{aligned}$$

missä

$$q_0 = 1 - p_0$$

ja p_0 on todennäköisyys, että koronaepidemia (tai -pandemia) on saatu kuriin. Todennäköisyys p_0 on herkkyysparametri, koska kukaan ei tohdi sitä arvioida.

Päätösmatriisi

Tarkastelemme Suomen BKT:n muutosta (prosentteina) eri vaihtoehtoisten politiikkojen ja eri korona- ja vientiskenaarioiden tapauksessa. Suomen johtavien talousasiantuntijoiden näkemys on seuraavassa palkkiomatriisissa:

	BKT:n muutos prosentteina			
Valinta	$0.75p_0$	$0.25p_0$	$0.25q_0$	$0.75q_0$
Erittäin liberaali politiikka	8	2	3	–5
Liberaali politiikka	6	2	2	–3
Nykypolitiikka	2	1	1	–2
Sääntö- & kuripolitiikka	0	–1	0	–2
Äärisääntö- & kuripolitiikka	–2	–1	–1	–1

Luvut perustuvat seuraaviin havaintoihin:

- Erittäin liberaali politiikka on hyvää, jos korona talttuu ja vienti vetää. Koronariski tälle politiikalle on merkittävä.
- Liberaali politiikka kestää erittäin liberaalia politiikkaa paremmin koronariskiä, mutta koronariski on silti merkittävä.
- Nykypolitiikka kestää koronariskiä hyvin, mutta ei osaa hyödyntää mahdollista koronanjälkeistä hyvää talouskehitystä parhaalla mahdollisella tavalla.
- Sääntö- & kuripolitiikka kestää erittäin hyvin koronariskiä, mutta saattaa haitata taloudellista kehitystä koronanjälkeisenä mahdollisena nousukautena.
- Äärimmäinen sääntö- & kuripolitiikka on turvallinen valinta koronaa silmällä pitäen.

Päätössääntöt ja päätös

Valtiontasoisessa toiminnassa odotusarvosääntö on erittäin perusteltu. Toisaalta odotusarvosääntö on herkkä eri skenaarioiden todennäköisyyksille, ja näitä emme pysty tarkasti arvioimaan. Siksi temperoimme odotusarvosääntöä tasapainoisesti Hurwiczin säännöllä, joka mahdollistaa optimismin käsittelyn koronavapaustodennäköidestä riippumattomalla tavalla.

Lopullinen päätössääntömme eli arvofunktiomme on siis

$$V(p_0, w) \;=\; 0.5 \cdot V^{\text{oa}}(p_0) \,+\, 0.5 \cdot V^{\text{Hur}}(w),$$

missä $V^{\text{oa}}(p_0)$ on odotusarvosääntö koronavapaustodennäköisyydellä p_0 ja $V^{\text{Hur}}(w)$ on Hurwiczin sääntö optimismin asteella w.

Ennen tarkempaa herkkyysanalyysiä tarkastelemme lyhyesti marginaaliarvofunktioita V^{oa} ja V^{Hur}, kun niiden parametrit vaihtelevat.

Odotusarvosäännölle saamme

	$V^{\text{oa}}(p_0)$				
Valinta	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Erittäin liberaali politiikka	–3.000	–0.625	**1.750**	**4.125**	**6.500**
Liberaali politiikka	–1.750	**–0.062**	1.625	3.312	5.000
Nykypolitiikka	–1.250	–0.500	0.250	1.000	1.750
Sääntö- & kuripolitiikka	–1.500	–1.187	–0.875	–0.562	–0.250
Äärisääntö- & kuripolitiikka	**–1.000**	–1.187	–1.375	–1.562	–1.750

Odotusarvosäännön nojalla siis Erittäin liberaali ja liberaali politiikka ovat parhaimpia, jos uskomme että korona saadaan kuriin vähintäänkin kohtalaisella todennäköisyydellä. Mikäli uskomme koronan varmasti riehuvan, on Äärisääntö & -kuripolitiikka perusteltu valinta.

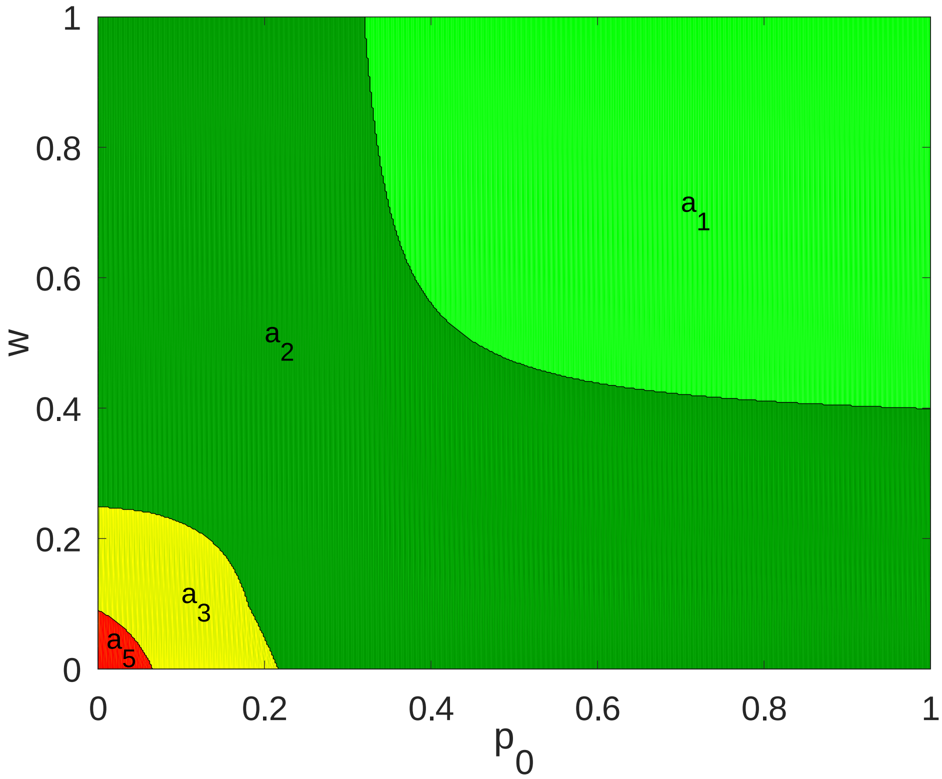
Hurwiczin säännölle saamme

	$V^{\text{Hur}}(w)$				
Valinta	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Erittäin liberaali politiikka	–5.000	–1.750	**1.500**	**4.750**	**8.000**
Liberaali politiikka	–3.000	**–0.750**	**1.500**	3.750	6.000
Nykypolitiikka	**–2.000**	–1.000	0.000	1.000	2.000
Sääntö- & kuripolitiikka	**–2.000**	–1.500	–1.000	–0.500	0.000
Äärisääntö- & kuripolitiikka	**–2.000**	–1.750	–1.500	–1.250	–1.000

Hurwiczin säännön nojalla nykypolitiikka ja sitä epäliberaalimmat politiikat ovat optimaalisia, jos olemme asenteeltamme äärimmäisen pessimistisiä. Mitä optimistisempia olemme sitä liberaalimman politiikan valitsemme.

Herkkyysanalyysi

Painottamalla Hurwiczilaista päätössääntöä ja odotusarvosääntöä yhtä paljon ja vaihtelemalla optimismin astettamme w ja koronankukistumistodennäköisyyttä p_0 saamme seuraavan herkkyyskuvan (katso liite A, m-tiedosto `ee.m`) :



Kuvassa vaaka-akselilla on koronankukistumistodennäköisyys p_0 ja pystyakselilla on hurwiczilainen optimismin aste. Kuva siis vastaa arvofunktiota

$$V(p_0, w) \;=\; 0.5 \cdot V^{\text{oa}}(p_0) \;+\; 0.5 \cdot V^{\text{Hur}}(w).$$

Päätökset on värikoodattu seuraavasti:

a_1 = Erittäin vapaa politiikka (vihreä).
a_2 = Vapaa politiikka (tumman vihreä).
a_3 = Nykyinen politiikka (keltainen).
a_4 = Sääntö- & kuripolitiikka (tumman punainen).
a_5 = Äärimmäinen sääntö- & kuripolitiikka (punainen).

Johtopäätös on, että Vapaa politiikka (a_2) on hyvä ratkaisu, jos pidämme koronan todennäköisyyttä suurena. Jos uskomme että korona saadaan kukistettua edes kohtalaisella todennäköisyydellä ja olemme edes kohtalaisen optimistisia, on Erittäin vapaa politiikka (a_1) paras ratkaisu. Nykypolitiikka (a_3) tai vielä ankarammat Sääntö- & kuripolitiikat (a_4 ja a_5) on optimaalista ainoastaan, jos olemme **sekä** erittäin pessimistisiä **että** uskomme koronan jatkuvan erittäin suurella todennäköisyydellä.

Liite A: laskelmat

Eeva evan laskelmat löytyvät m-tiedostosta `ee.m`, joka on listattu ja linkattu alla:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: ee.m
%%
%% Eeva Evan tieteellinen selonteko paaministerille Suomen BKT:n kehityksesta
%% vuodelle 2021 eri poliittisilla paatoksilla ja eri skenaarioilla.
%%
%% Poliittiset paatosvaihtoehdot
%%
%% a1 = Erittain liberaali politiikka (optimistinen riskillinen)
%% a2 = Liberaali politiikka
%% a3 = Nykypolitiikka
%% a4 = Saanto- & kuripolitiikka
%% a5 = Aarimmainen saanto- & kuripolitiikka (pessimistinen vahariskinen)
%%
%% Skenaariot
%%
%% s1 = Korona aisoissa ja vienti vetaa
%% s2 = Korona aisoissa, mutta vienti tokkii
%% s3 = Korona riehuu, mutta vienti vetaa
%% s4 = Korona riehuu ja vienti tokkii
%%
%% Skenaarioiden todennakoisyydet tuntemattoman koronatodennakoisyyden p0
%% funktioina (p0 = korona aisoissa)
%%
%% p1 = 0.75*p0,
%% p2 = 0.25*p0,
%% p3 = 0.25*q0,
%% p4 = 0.75*q0,
%%
%% missa
%%
%% q0 = 1-p0
%%
%% on todennakoisyys, etta korona riehuu
%%
%% HUOM: ee.m kayttaa funktiotiedostoja pmatriisi.m ja skaalaus.m

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Paatosmatriisi (BKT:n muutos prosentteina vuonna 2021)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

R = [
 8   2   3  -5 ; %% Erittain vapaa
 6   2   2  -3 ; %% Vapaa
 2   1   1  -2 ; %% Nykyinen
 0  -1   0  -2 ; %% Saanto & kuri
-2  -1  -1  -1 ; %% Aarimmainen saanto & kuri
 ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% Paatossaanto  V(p0,w) = 0.5*V_oa(p0) + 0.5*V_Hur(w)
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```matlab
%% Paatosongelmien vakiokentat.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

po_Hur.pmat = R;
po_Hur.psaanto = "Hur";

po_oa.pmat = R;
po_oa.psaanto = "oa";

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Pienehkot taulukot erikseen p0 & w herkkyyksille.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = 5;
koronatnt = linspace(0,1,n);
optasteet = linspace(0,1,n);

%% Pieni taulukko eri optimismin asteilla.
for i = 1:length(optasteet)
    w = optasteet(i);
    po_Hur.optaste = w;
    pr_Hur = pmatriisi(po_Hur);
    V_Hur(:,i) = pr_Hur.parvot;
end

%% Pieni taulukko eri koronatodennakoisyyksilla.
for i = 1:length(koronatnt)
    p0 = koronatnt(i);
    q0 = 1-p0;
    po_oa.tn = [0.75*p0  0.25*p0  0.25*q0  0.75*q0]';
    pr_oa = pmatriisi(po_oa);
    V_oa(:,i) = pr_oa.parvot;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Herkkyyskuva, kun p0 ja w vaihtelee.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Otteistustaajuus.  Kun N=500 laskeminen kestaa noin 30 sekuntia.
N = 500;

p0arvot = linspace(0,1,N);
warvot = linspace(0,1,N);
z = zeros(N);

for i=1:length(p0arvot)
    p0 = p0arvot(i);
    q0 = 1-p0;
    po_oa.tn = [0.75*p0  0.25*p0  0.25*q0  0.75*q0]';
    pr_oa = pmatriisi(po_oa);
    v_oa = skaalaus(pr_oa.parvot);
    for j=1:length(warvot)
        w = warvot(j);
        po_Hur.optaste = w;
        pr_Hur = pmatriisi(po_Hur);
        v_Hur = skaalaus(pr_Hur.parvot);
        v = 0.5*( v_oa + v_Hur);
        [roskaa, z(j,i)] = max(v);
```

```
    end
end

%% Piirretaan kuva.  Vektori [1 2 3 5], joka sisaltaa matriisin z mahdolliset
%% arvot auttaa piirtamaan varit oikein.
contourf(p0arvot, warvot, z, [1 2 3 5])
set(gca, "fontsize", 24);
xlabel("p_0")
ylabel("w")
puna  = [1 0 0];
viher = [0 1 0];
kelta = [1 1 0];
colormap([viher; 0.6*viher; kelta; puna])
text(0.70,0.70,"a_1", "fontsize",24)
text(0.20,0.50,"a_2", "fontsize",24)
text(0.10,0.10,"a_3", "fontsize",24)
text(0.01,0.03,"a_5", "fontsize",24)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Herkkyyskuvan piirto PDF-tiedostoon.  Poista kommentit, jos haluat PDF:n
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%orient("landscape");
%print("ee_herkkyyskuva.pdf");
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/ee.m

Liite B: salainen lisäpöytäkirja

Päätössäännöt oli valittu niin, että saimme helposti tulkittavat vapaat parametrit: yleinen hurwiczilainen optimismin aste ja koronan kukistumistodennäköisyys. Tässä ei sinänsä huijattu ollenkaan: nämä ovat luontevia mittareita.

Palkkiomatriisiksi oli valittu BKT:n muutos vuonna 2022. Tässäkään ei ole sinänsä mitään epärehellistä. Toki jos palkkiomatriisiksi olisi valittu esimerkiksi jotakin joka liittyy suoraan vaikkapa kansanterveyteen, olisi varmaan saatu toisenlaiset tulokset. Ei kuitenkaan ole erityisen epärehellistä valita jotakin tiettyä fokusta.

Palkkiomatriisi oli "Suomen parhaiden talousasiantuntijoiden" näkemys. Nämä asiantuntijat olivat minä itse. Kokkasin palkkiomatriisia kunnes se antoi haluamani kuvan kuitenkin niin, ettei matriisi näyttäisi ilmiselvästi pöhköltä.

Eri vaihtoehtoehdot oli myös valittu Eeva Evan sidosryhmien kannalta erittäin tarkoituksenmukaisesti ja nimetty vähemmän neutraalisti.

Osa IV

Harjoitustyöt

Luku 7

Sinä itse

Tehtävän kuvaus

Jokomaa on suomalaisten rakastama turistikohde. Jokomaassa on havaittu Oliopoliota. Se on viruksen aiheuttama erittäin tarttuva sairaus. Valtaosa tartunnoista on oireettomia ja useimmilla tartunnan saaneilla oireet ovat lieviä, kuten kuumetta, kurkkukipua ja huonovointisuutta. Halvausta esiintyy noin 5 prosentilla tartunnan saaneista. Halvaukseen sairastuneilla kuolleisuus on noin 5-10 prosenttia; puolet halvaukseen sairastuneista toipuu kokonaan ja lopuilla esiintyy pysyviä haittoja. Tauti tarttuu noin 600 kertaa todennäköisemmin lapsiin kuin aikuisiin.

Oliopolioon ei vielä ole olemassa rokotusta, mutta testi sille on olemassa. Testi on 99 % luotettava.

Yleisesti ei tiedetä aiheuttaako Oliopolio pandemian, mutta ulkopuolisten arvioiden mukaan se on jo läpäissyt koko Jokomaan populaation. Jokomaa ei ole vielä sulkenut rajojaan eikä toimeenpannut karanteeniohjelmaa.

Sinun tulee päättää mitä tehdä ensi lukuvuosi. **Esimerkiksi** ajattelet

- opiskella päätoimisesti,
- opiskella töiden ohella,
- olla päätoimisesti töissä,
- pitää välivuoden, jotta "löytäisit itsesi" Kaukastanilaisessa temppelissä munkkina meditoiden.

Et tiedä miten Oliopolio etenee, joten päätöksesi seuraukset ovat erilaisia riippuen **esimerkiksi** siitä,

- onko yhteiskunta (ja rajat) suljettu Oliopolion vuoksi,
- onko yliopisto etäopetuksessa,
- onko maailma lamassa.

Muotoile itsellesi päätösmatriisi ja ratkaise se kahdella valitsemallasi päätössäännöllä. Tarkastele myös yhteispäätöstä puolisosi/äitisi/kissasi/koirasi kannalta ja tee päätöksistäsi herkkyysanalyysi.

Huomautus Luku 5 on kuvitteellisen opiskelijan 3 pisteen arvoinen harjoitustyö koronan tapauksessa. Suosittelen käyttämään sen rakennetta ja esitystapaa harjoitustyössä, jos jokin toinen rakenne tai esitystapa ei sovi sinulle erityisesti paremmin.

Ohjeita

Alla tarkahkoja ohjeita harjoitustyölle, jotka noudattavat Stefan Stuidun esimerkin etenemisjärjestystä ja rakennetta.

(i) Esittele itsesi vähintään sillä tasolla kuin Stefan Stuidu on esitelty luvussa 5.
(ii) Esittele ongelman aikalinja vähintään sillä tasolla kuin luvussa 5.
(iii) Valitse noin 3–8 päätösvaihtoehtoa.
(iv) Valitse noin 3–8 skenaariota
(v) Arvioi eri skenaarioiden todennäköisyydet ja valitse jokin (tyypillisesti jonkinlainen koronapandemian riehumiseen liittyvä) poikkeuksellisen epävarma, mutta kriittinen, todennäköisyys vapaaksi herkkyysparametriksi.
(vi) Valitse noin 1–2 optimointitavoitetta eli palkkiomatriisia.
(vii) Rakenna palkkiomatriisit. Tähän kohtaan kannattaa keskittyä. Jos palkkiomatriisien luvut ovat järkeviä, voi päätösmatriisianalyysi olla järkevää; ja jos ei, niin ei.
(viii) Tässä kohtaa kannattaa tarkistaa, muodostavatko kohdat (iii)–(vii) järkevän kokonaisuuden. Tarvittaessa uudelleenmääritä nämä kohdat.
(ix) Valitse noin 1–3 päätössääntöä.
(x) Laske arvofunktioita eri (yhdistetyillä) päätössäännöillä ja mahdollisesti eri parametreilla ja esitä niiden avulla alustava analyysi.
(xi) Tee herkkyysanalyysi omalle päätöksellesi kahden vapaan parametrin suhteen.
(xii) Tarkastele päätösongelmaasi esimerkiksi puolisosi, perheesi, mummosi, koirasi tai kissasi kannalta.
(xiii) Rakenna edellisten päätösten perusteella yhteispäätös ja tee sille herkkyysanalyysi.
(xiv) Tee lopullinen päätös ja analysoi sitä.
(xv) Palauta valmis harjoitustyö yhtenä PDF-tiedostona opettajalle sähköpostilla osoitteeseen **tommi.sottinen@uwasa.fi**. Jos aiot tehdä myös harjoitustyön 2, niin palauta se samassa sähköpostiviestissä erillisessä PDF-tiedostossa. Muista ilmoittaa opiskelijanumerosi viestissäsi.

Arvostelu

Harjoitustyö arvostellaan arvosana-asteikolla 1–3 pistettä: 1 piste tarkoittaa kurssin läpäisyä arvosanalla 1 (jos ei saa lisää pisteitä 2. harjoitustyöstä).

Yleiset laadulliset periaatteet arvostelulle ovat:

3 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että sen pystyy lukemaan ja ymmärtämään periaatteessa kuka tahansa järkevä ihminen. Ulkoasu ja kieliasu ovat viimeisteltyjä.
2 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että sen pystyy lukemaan ja ymmärtämään periaatteessa kuka tahansa kurssin suorittanut. Ulkoasu ja kieliasu ovat hyviä.
1 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että opettaja pystyy sen lukemaan ja ymmärtämään ilman vaikeuksia. Ulkoasussa tai kieliasussa ei ole merkittäviä puutteita.

Erityiset määrälliset periaatteet arvostelulle ovat:

3 p Kaikki kohdat (i)–(xv) edellisen osion listasta on toteutettu.

- 2 p Edellisen osion kohdissa (i)–(xv) on yhteispäätöstarkastelu (xii)–(xiii) tekemättä tai kohdassa (vi) on valittu vain yksi palkkiomatriisi ja kohdassa (ix) on valittu vain yksi päätössääntö.
- 1 p Edellisen osion kohdissa (i)–(xv) on yhteispäätöstarkastelu (xii)–(xiii) tekemättä ja kohdassa (vi) on valittu vain yksi palkkiomatriisi ja kohdassa (ix) on valittu vain yksi päätössääntö. Kohdassa (xi) herkkyysanalyysi on puutteellinen tai puuttuu ihan tyystin.

Minimaalisen harjoitustyön muotoilu ja laskut

Seuraava m-tiedosto `ll.m` sisältää kuvitteellisen Laila Laihialaisen harjoitustyön minimaalisen kuvauksen ja siihen liittyvät laskut ilman yhdistettyä päätöstä puolison, äidin, kissan tai muun vastaavan kanssa. Jos m-tiedoston sisältö ja laskujen tulokset avattaisiin lukijalle ymmärrettäväksi raportiksi, olisi se 1 pisteen arvoinen harjoitustyö.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%% FILE: ll.m
%%
%% Laila Laihialaisen harjoitustyo 1 (minialku).
%%
%% Laila Laihialainen asuu aitinsa luona Laihialla ja miettii mita tehda
%% ensi lukuvuonna.
%%
%% Laila pohtii seuraavien vaihtoehtojen valilla:
%%
%% a1 = Muuttaa Vaasaan VOAS-soluun.
%% a2 = Autoillaan Vaasaan.
%% a3 = Etaopiskellaan Laihialta kasin.
%%
%% Skenaariot ovat
%%
%% s1 = Oliopolio hallinnassa.
%% s2 = Oliopolio paalla, kampus rajoitetusti auki, osittain etaopetusta.
%% s3 = Oliopolio paalla ja yliopisto taysin etaopetuksessa. (Ruokalat kiinni)
%%
%% Skenaarioiden todennakoisyydet:
%%
%% p0 = tn etta Oliopolio on paalla.  (p0 = p2+p3)
%% q0 = 1-p0
%%
%% p1 = q0
%% p2 = p0/2
%% p3 = p0/2
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Palkkiomatriisit (monitavoiteoptimointi)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Kuukausittaiset kulut
R1 = [
100+40    100+50   100+100;   %% VOAS-solu  (vuokra+ruoka)
    120   0.5*120     0*120;   %% Autoilu (100% - 50% - 0% lahiopetusta)
      0         0         0;   %% Etaily  (baseline)
```

```
];

R1 = -R1;      %% Maksimointimuoto!


%% Opintopistekertyma
R2 = [
30  25  20;    %% VOAS-solu
25  25  20;    %% Autoilu
10  15  20;    %% Etaily
];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Paatossaanto on "oa".  Laskuja kun p0 vaihtelee vahan.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

p0arvot = [0.00  0.25  0.50  0.75  1.00];  %% 0:0.25:1, linspace(0,1,5)

for i=1:length(p0arvot)
    p0 = p0arvot(i);
    q0 = 1-p0;

    po1.pmat = R1;
    po1.psaanto = "oa";
    po1.tn = [q0  p0/2  p0/2]';
    pr1 = pmatriisi(po1);
    V1(:,i) = pr1.parvot;

    po2.pmat = R2;
    po2.psaanto = "oa";
    po2.tn = [q0  p0/2  p0/2]';
    pr2 = pmatriisi(po2);
    V2(:,i)  = pr2.parvot;
end

%% Matriisissa V1 on oa-saannon arvofunktiota kuukausikuluille eri
%% Oliopoliotodennakoisyyksille.  Matriisissa V2 on oa-saannon arvofunktioita
%% opintopistekertymalle eri Oliopoliotodennakoityyksille.
%%
%% Osoittautuu, etta V1:n mukaan a3 on aina optimaalinen ja V2:n mukaan a1 on
%% aina optimaalinen.

%% Yhdistetty paatossaanto on V(p0,w) = wV1(p0) + (1-w)V2(p0).  Lasketaan ja
%% piirretaan sita vastaava herkkyyskuva, kun p0 ja w vaihtelevat

%% Otteistustaajuus N.  Kun N=500 laskut kestavat noin 3 sekuntia.
N = 500;
p0arvot = linspace(0,1,N);
warvot = linspace(0,1,N);
z = zeros(N);

%% Paatossaantojen vakiokentat (uudestaan, varmuuden valttamiseksi)
po1.psaanto = "oa";
po1.pmat = R1;
po2.psaanto = "oa";
po2.pmat = R2;

%% Herkkyysmatriisin z laskeminen.
```

```
for i=1:N
    p0 = p0arvot(i);
    q0 = 1-p0;
    po1.tn = [q0  p0/2  p0/2]';
    po2.tn = [q0  p0/2  p0/2]';
    pr1 = pmatriisi(po1);
    pr2 = pmatriisi(po2);
    v1 = pr1.parvot;
    v1 = (v1-min(v1))/(max(v1)-min(v1));
    v2 = pr2.parvot;
    v2 = (v2-min(v2))/(max(v2)-min(v2));
    for j=1:N
        w = warvot(j);
        v = w*v1 + (1-w)*v2;  %% v = v(p0,w)
        [roskaa, z(j,i)] = max(v);
    end
end

%% Herkkyysmatriisin z piirtaminen
contourf(p0arvot, warvot, z);

%% Kuvasta nakyy etta kaikki kolme vaihtoehtoa a1, a2 ja a3 voivat olla
%% optimaalisia riippuen siita, mita parametrien p0 ja w arvot ovat.
```

https://www.uwasa.fi/~tsottine/orms2020/l1.m

Luku 8

THL:n selvitys Päivi Pääministerille

Tehtävän kuvaus

Jokomaa on suomalaisten rakastama turistikohde. Jokomaassa on havaittu Oliopoliota. Se on viruksen aiheuttama erittäin tarttuva sairaus. Valtaosa tartunnoista on oireettomia ja useimmilla tartunnan saaneilla oireet ovat lieviä, kuten kuumetta, kurkkukipua ja huonovointisuutta. Halvausta esiintyy noin 5 prosentilla tartunnan saaneista. Halvaukseen sairastuneilla kuolleisuus on noin 5-10 prosenttia; puolet halvaukseen sairastuneista toipuu kokonaan ja lopuilla esiintyy pysyviä haittoja. Tauti tarttuu noin 600 kertaa todennäköisemmin lapsiin kuin aikuisiin.

Oliopolioon ei vielä ole olemassa rokotusta, mutta testi sille on olemassa. Testi on 99 % luotettava.

Yleisesti ei tiedetä aiheuttaako Oliopolio pandemian, mutta ulkopuolisten arvioiden mukaan se on jo läpäissyt koko Jokomaan populaation. Jokomaa ei ole vielä sulkenut rajojaan eikä toimeenpannut karanteeniohjelmaa.

Voit pohdiskella **esimerkiksi** seuraavia toimenpiteitä

- matkustusrajoituksia Jokomaahan,
- karanteeneja Jokomaahan matkustaneille,
- rajoja kiinni kaikkialle,
- koko Suomen sulkemista.
- odottaa rokotetta ja sitten pakkorokottaa kaikki.

Palkkiot/rangaistukset voisivat olla **esimerkiksi**

- menetetyt terveet elinvuodet,
- BKT:n muutos,
- “kansalaisvapaudet”.

Päätössääntöjä voisi olla **esimerkiksi**

- odotusarvosääntö,
- Hurwiczin sääntö,
- “vara”-sääntö.

Muotoile THL:n päätösmatriisi ja tee siihen herkkyysanalyysi kahden relevantin muuttujan suhteen.

Luvun 6 esimerkki voi toimia tämän harjoitustyön pohjana. Luvussa 6 Eeva Eva oli vähemmän rehellinen analyysissään. Voit toimia Eeva Evan tavoin, mutta jos teet näin, niin paljasta esimerkiksi salaisessa lisäpöytäkirjassa, millä tavalla kokkasit ratkaisun haluamaksesi. Suosittelen kuitenkin tekemään rehellisen raportin. Keskeinen ingelma on varmaan palkkiomatriisin tai -matriisien lukujen määrääminen.

Ohjeita

Toisin kuin 1. harjoitustyö, joka voidaan tehdä varioimalla Stefan Stuidun esimerkkiä luvusta 5, tämä 2. harjoitustyö vaatii omaa luovuutta. Tämän vastapainoksi itse työ saa olla huomattavasti suppeampi kuin 1. harjoitustyö. Alla kuitenkin muutamia helpottavia ohjeita harjoitustyölle:

(i) Valitse noin 4–10 päätösvaihtoehtoa.
(ii) Valitse noin 4–10 skenaariota
(iii) Arvioi eri skenaarioiden todennäköisyydet ja valitse 1–2 todennäköisyyttä herkkyysparametreiksi. Sopivia todennäköisyyksiä ovat esimerkiksi Oliopoliopandemian riehumisen, Oliopoliotestin väärän positiivisen ja Oliopoliorokotteen vakavan haitallisen sivuvaikutuksen todennäköisyys.
(iv) Valitse noin 1–3 optimointitavoitetta eli palkkiomatriisia.
(v) Rakenna palkkiomatriisit. Tähän kohtaan kannattaa keskittyä. Jos palkkiomatriisien luvut ovat järkeviä, voi päätösmatriisianalyysi olla järkevää; ja jos ei, niin ei.
(vi) Tässä kohtaa kannattaa tarkistaa, muodostavatko kohdat (iii)–(vii) järkevän kokonaisuuden. Tarvittaessa uudelleenmääritä nämä kohdat.
(vii) Valitse noin 1–3 päätössääntöä.
(viii) Laske arvofunktioita eri (yhdistetyillä) päätössäännöillä ja mahdollisesti eri parametreilla ja esitä niiden avulla alustava analyysi.
(ix) Tee herkkyysanalyysi omalle päätöksellesi kahden vapaan parametrin suhteen.
(x) Tee lopullinen suositus Päivi Pääministerille ja analysoi sitä.
(xi) Palauta valmis harjoitustyö yhtenä PDF-tiedostona opettajalle sähköpostilla osoitteeseen **tommi.sottinen@uwasa.fi**. Jos aiot tehdä myös harjoitustyön 1, niin palauta se samassa sähköpostiviestissä erillisessä PDF-tiedostossa. Muista ilmoittaa opiskelijanumerosi viestissäsi.

Arvostelu

Harjoitustyö arvostellaan arvosana-asteikolla 1–3 pistettä: 1 piste tarkoittaa kurssin läpäisyä arvosanalla 1 (jos ei saa lisää pisteitä 1. harjoitustyöstä).

Yleiset laadulliset periaatteet arvostelulle ovat samat kuin harjoitustyölle 1:

3 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että sen pystyy lukemaan ja ymmärtämään periaatteessa kuka tahansa järkevä ihminen. Ulkoasu ja kieliasu ovat viimeisteltyjä.

2 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että sen pystyy lukemaan ja ymmärtämään periaatteessa kuka tahansa kurssin suorittanut. Ulkoasu ja kieliasu ovat hyviä.

1 p Harjoitustyö on kirjoitettu niin, että opettaja pystyy sen lukemaan ja ymmärtämään ilman vaikeuksia. Ulkoasussa tai kieliasussa ei ole merkittäviä puutteita.

Erityiset määrälliset periaatteet arvostelulle ovat:

3 p Kaikki kohdat (i)–(xiii) edellisen osion listasta on toteutettu ei-minimilaajuudella. Päätösmatriisit ja todennäköisyydet ovat numeerisesti hyvin perusteltuja esim. THL:n datan pohjalta. Vaihtoehtoisesti tarkoitushakuinen vähemmän rehellinen lähestymistapa onnistuu huijauksessa.

2 p Kaikki kohdat (i)–(xiii) edellisen osion listasta on toteutettu ei-minimilaajuudella, mutta päätösmatriisien luvut tai skenaarioiden todennäköisyydet ovat erittäin kyseenalaisia.

1 p Kohdat (i)–(xiii) on toteutettu jollakin tasolla. Herkkyysanalyysi (xi) on puutteellinen. Päätösmatriisien luvut ja skenaarioiden todennäköisyydet ovat epäuskottavia. Tarkastelu on suppea: minimaalisesti päätösvaihtoehtoja ja skenaarioita; vain yksi optimointitavoite (palkkiomatriisi) ja 1–2 päätössääntöä.

Tekninen huomautus: Bayesin kaava

Huom: Tämä osio viittaa koronatilanteeseen marraskuussa 2020.

Koronatesteihin, kuten kaikkiin **dikotomisiin** (binäärisiin, kaksiarvoisiin) testeihin, liittyy kahden tyyppisiä virheitä:

I **Väärä positiivinen**: testi väittää että testatulla on korona, vaikka todellisuudessa hänellä ei ole koronaa.

II **Väärä negatiivien**: testatulla on korona, mutta testi ei sitä havainnut.

Tyypillisesti väärät negatiiviset ovat koronatyyppisissä testeissä yleisempiä kuin väärät positiiviset. Tämä on toki luonnollista ihan kemiallisista syistä johtuen.

Eri koronatesteistä ja niiden luotettavuudesta on liikkeellä ristiriitaista tietoa (päiväys: 28. marraskuuta 2020). Tyypin II virheen (väärä negatiivinen) todennäköisyysarviot vaihtelevat välillä 2–37 % (melkoinen vaihteluväli). Tyypin I virheen (väärä positiivinen) todennäköisyysarviot vaihtelevat välillä 0–2 %. (Luku 0 % on täysin epäuskottava! Vaikka testi olisikin täysin luotettava, itse testaus ei ole.)

Oletamme nyt esimerkin vuoksi sinänsä uskottavat arviot, että

I Väärän positiivisen todennäköisyys on 1 %.

II Väärän negatiivisen todennäköisyys on 5 %.

Oletamme että testaamme satunnaisen henkilön (tämä on eri asia kuin tarkastella satunnaista testissä käynyttä henkilöä) ja tulos on positiivinen. Mikä on todennäköisyys, että henkilöllä on korona? Intuitiivisesti mieleen tulee 99 %. Tämä intuitio on kuitenkin **täysin väärin**! Syy tähän väärään intuitioon lienee luonnollisen kielen kyvyttömyys täsmälliseen ajatteluun. Jotta asia tulee selväksi täydennämme luonnollista kieltä symbolisella ajattelulla, jota myös joskus matematiikaksi kutsutaan.

Meillä on tarkasteltavana kaksi tapahtumaa:

$$\begin{aligned} A &= \text{Henkilöllä on korona.} \\ E &= \text{Henkikö sai positiivisen tuloksen koronatestissä.} \end{aligned}$$

Meitä kiinnostaa todennäköisyys $\mathbb{P}[A|E]$. Väärän intuition vastaus 99 % on itse asiassa todennäköisyys $\mathbb{P}[\text{ei } E|\text{ei } A] = 1 - \mathbb{P}[E|\text{ei } A]$, eli todennäköisyys saada negatiivinen testitulos, vaikka henkilöllä onkin korona. Tämä ei ole sama asia kuin oikea positiivinen. Toisin sanoen oikea positiivinen ei ole väärän positiivisen vastakohta, mitä se ikinä sitten tarkoittaakaan.

Miten sitten todennäköisyys $\mathbb{P}[A|E]$ lasketaan, kun tyypin I ja II virheet on annettu? Vastaus tulee Bayesin kaavasta, joka johdamme seuraavaksi.

Meille on siis annettu tyypin I ja tyypin II virheet, eli todennäköisyydet

$$\mathbb{P}[E|\text{ei } A] \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}[\text{ei } E|A]$$

ja tehtävänä on laskea todennäköisyys $\mathbb{P}[A|E]$. Tosin sanoen meidän pitää kääntää "ehdot ympäri": $E|A \rightsquigarrow A|E$. Perushavainto on niinkin yksinkertainen kuin, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \text{ ja } E] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A], \\ \mathbb{P}[E \text{ ja } A] &= \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[A|E], \end{aligned}$$

ihan vain ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla. Koska toisaalta on ilmiselvää, että

$$\mathbb{P}[A \text{ ja } E] = \mathbb{P}[E \text{ ja } A],$$

niin

$$\mathbb{P}[E]\mathbb{P}[A|E] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A].$$

Jakamalla puolittain $\mathbb{P}[E]$:llä kääntyvät ehdot ja saamme kuuluisan **Bayesin kaavan**:

$$\mathbb{P}[A|E] = \frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A]}{\mathbb{P}[E]}.$$

Kaavan oikean puolen alakerrassa oleva positiivisen testituloksen todennäköisyys $\mathbb{P}[E]$ voidaan esittää **kokonaistodennäköisyyden kaavan** avulla muodossa

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A] + \mathbb{P}[\text{ei } A]\mathbb{P}[E|\text{ei } A],$$

sillä positiiviset testitulokset koostuvat kahdesta osasta: oikeista positiivisista ja vääristä positiivisista. Yhdistämällä tämä kokonaistodennäköisyyden kaava Bayesin kaavaan saadaan seuraava kaava, jota myös kutsutaan **Bayesin kaavaksi**:

$$\mathbb{P}[A|E] = \frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A]}{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A] + \mathbb{P}[\text{ei } A]\mathbb{P}[E|\text{ei } A]}.$$

Yritämme sitten käyttää Bayesin kaavaa koronatestiongelmamme ratkaisemiseen. Meillä on siis tiedossa, että

$$\mathbb{P}[E|\text{ei } A] = 1\ \% \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}[E|A] = 95\ \%.$$

Huomaamme, että jotain puuttuu! Emme tiedä todennäköisyyttä $\mathbb{P}[A]$ että satunnaisella (testaamattomalla) henkilöllä on korona. Tätä emme voi päätellä annetuista väärien positiivisten ja väärien negatiivisten todennäköisyyksistä. Syy on se, että nämä virhetodennäköisyydet ovat koronatestin ominaisuuksia, eivät niinkään itse koronan tai sen levinneisyyden ominaisuuksia. Virhetodennäköisyydet ovat samalle testille samat sekä Italiassa että Suomessa, mutta koronan levinneisyys $\mathbb{P}[A]$ on ainakin näin marraskuun lopussa 2020 paljon suurempi Italiassa kuin Suomessa.

Meidän on siis arvioitava jotenkin $\mathbb{P}[A]$ eli niin sanottu **prioritodennäköisyys** laskeaksemme niin sanotun **posterioritodennäköisyyden** $\mathbb{P}[A|E]$ koronatestin **uskottavuuksista** $\mathbb{P}[E|A]$ ja $\mathbb{P}[E|\text{ei } A]$. Tätä varten arvioimme kylmästi, että 28. marraskuuta 2020

$$\mathbb{P}[A] \;=\; 23\,766 \cdot 0.3 \cdot 3 \,/\, 5\,530\,000 \;=\; 0.4\,\%.$$

Arvio perustuu seuraaviin THL:n antamiin lukuihin 28. marraskuuta 2020 ja yhteen Harrison–Stetson -menetelmällä saatuu arvioon:

- 23 766 on todetut koronatapaukset epidemian alusta lähtien.
- 70 % on parantuneet koronatapaukset epidemian alusta lähtien.
- 3 on hatusta repäisty kerroin (Harrison–Stetson -menetelmä), jonka mukaan todellinen koronatapausten määrä on kolminkertainen todettuun määrään nähden. Testattuja koronanäytteitä on vajaa 2 miljoonaa, joten ehkä luku on oikeaa kertaluokkaa.
- 5 530 000 on Suomen väestön koko.

Lopuksi, sijoittamalla arvioimme Bayesin kaavaan saamme positiivisen testituloksen saaneelle henkilölle todennäköisyyden sairastaa koronaaa olevan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A|E] &= \frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[E|A]}{\mathbb{P}[E]} \\ &= \frac{0.4\,\% \cdot 95\,\%}{0.4\,\% \cdot 95\,\% + 99.6\,\% \cdot 1\%} \\ &= 28\,\%.\end{aligned}$$

Siis hieman yllättäen positiivisesti testattu henkilö sairastaa koronaa ainoastaan 28 % todennäköisyydellä. Siis merkittävä osa testituloksista on vääriä positiivisia. Tämä saattaa olla yllättävää, mutta toisaalta kannattaa huomata, että suhteellinen muutos sairastamisen prioritodennäköisyydestä $\mathbb{P}[A] = 0.4\,\%$ sairastamisen posterioritodennäköisyyteen $\mathbb{P}[A|E] = 28\,\%$ on kuitenkin melkoinen: 70-kertainen.