



# Sisarusongelma – paradoksi ehdollisesta todennäköisyydestä

Saara Lehto ja Tommi Sottinen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Todennäköisyyslaskenta on täynnä erilaisia paradokseilta tuntuvia ongelmia. Monet niistä liittyvät ehdolliseen todennäköisyyteen. Paradoksi syntyy, jos kysymys tai annetut tiedot ymmärretään väärin. Tutkimme tässä yhtä tällaista ongelmaa.

**Sisarusongelma:** Äidillä on kaksi lasta, joista toinen on tyttö. Mikä on todennäköisyys, että toinen on poika?

Oletamme, että tytöt ja pojat syntyvät toisistaan riippumatta samalla todennäköisyydellä  $1/2$ .

**Väärä vastaus:**  $1/2$ .

Virheellinen ratkaisu perustuu seuraavaan päättelyyn. Äidillä on tyttö. Seuraava lapsi on joko poika tai tyttö. Todennäköisyys, että se on poika on  $1/2$ .

On totta, että pojan syntymätodennäköisyys on  $1/2$ , mutta kysytäänkö ongelmassa tätä?

**Oikea vastaus:**  $2/3$ .

Mietitään tilannetta huolellisemmin. Perheessä on kaksi lasta. Jos äiti luettelee lapset ikäjärjestyksessä, mahdollisuuksia ovat:

1. tyttö–tyttö,

2. tyttö–poika,

3. poika–tyttö,

4. poika–poika.

Periaatteessa kaikki nämä vaihtoehdot ovat yhtä todennäköisiä. Koska tiedämme, että perheessä on tyttö, on vaihtoehto 4 kuitenkin mahdoton. Vaihtoehdot 1–3 ovat sen sijaan edelleen yhtä todennäköisiä. Näistä vaihtoehdoista kahdessa on poika. Siten todennäköisyys, että perheessä on poika on  $2/3$ .

## Ongelman systemaattinen mallinnus

Miten sitten todennäköisyyslaskennan ongelmia tulisi ratkoa? Tässä esitetyt ratkaisut lienevät molemmat ensi silmäyksellä uskottavia. Ne ovat kuitenkin vain tähän erikoistapaukseen sopivia. Esitämmekin seuraavassa systemaattisemman tavan oikean ratkaisun löytämiseen.

Unohdetaan aluksi varsinaisen kysymyksen pohtiminen ja tarkastellaan rauhassa tehtävän tilannetta.

(a) Äidillä on kaksi lasta. Mahdollisia tapahtumia ovat siis järjestetyt parit TT, TP, PT ja PP, missä T = tyttö ja P = poika.

(b) Toinen lapsista on tyttö. Mahdollisia pareja ovat siis TT, TP ja PT. Sanotaan, että tapahtuma

$$TT \text{ tai } TP \text{ tai } PT = \text{ei PP}$$

on sattunut.

(c) Kysytty tapahtuma ”toinen lapsista on poika” on puolestaan

$$TP \text{ tai } PT \text{ tai } PP = \text{ei TT}.$$

(d) Koska tytöt ja pojat syntyvät toisistaan riippumattomasti samalla todennäköisyydellä  $1/2$ , on jokaisen järjestetyn tyttö/poika-parin todennäköisyys sama  $1/4$ .

Ongelmassa kysytään, mikä on todennäköisyys, että toinen lapsista on poika, kun tiedetään, että toinen lapsista on tyttö. Eli mikä on todennäköisyys, että tapahtuma ”TP tai PT tai PP” sattuu ehdolla, että tapahtuma ”TT tai TP tai PT” on sattunut. Kyseessä on siis ehdollinen todennäköisyys ja se merkitään

$$\mathbf{P}(TP \text{ tai } PT \text{ tai } PP \mid TT \text{ tai } TP \text{ tai } PT)$$

$$= \mathbf{P}(\text{ei TT} \mid \text{ei PP}).$$

Tässä siis  $\mathbf{P}$  tarkoittaa todennäköisyyttä ja merkin  $\mid$  voi lukea ”ehdolla”.

Nyt tehtävä on oikein muotoiltu. Jäljellä on enää vastauksen laskeminen. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla

$$\mathbf{P}(\text{ei TT} \mid \text{ei PP}) = \frac{\mathbf{P}((\text{ei TT}) \text{ ja } (\text{ei PP}))}{\mathbf{P}(\text{ei PP})}.$$

Alakerta on helppo laskea. Nimittäin

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{ei PP}) &= 1 - \mathbf{P}(\text{PP}) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Yläkerran laskemiseksi huomaamme, että

$$(\text{ei TT}) \text{ ja } (\text{ei PP}) = TP \text{ tai } PT.$$

Siispä

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((\text{ei TT}) \text{ ja } (\text{ei PP})) &= \mathbf{P}(TP \text{ tai } PT) \\ &= \mathbf{P}(TP) + \mathbf{P}(PT) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Olemme siis saaneet vastauksen

$$\mathbf{P}(\text{ei TT} \mid \text{ei PP}) = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Ratkaisussa olennaista oli oivaltaa, että tehtävänannon ”toinen lapsista” voi olla yhtä hyvin lapsista nuorempi kuin vanhempikin. Väärä vastaus ei ottanut tätä huomioon vaan vastasi eri kysymykseen

$$\mathbf{P}(2. \text{ lapsi on poika} \mid 1. \text{ lapsi on tyttö})$$

$$= \mathbf{P}(TP \text{ tai } PP \mid TP \text{ tai } TT).$$

Lopuksi jätämme lukijalle ratkaistavaksi seuraavan kolmen lapsen sisarusongelman.

**Ongelma:** Äidillä on 3 lasta, joista yksi on tyttö. Mikä on todennäköisyys, että äidillä on poika?

Oikea vastaus on  $6/7$ . Virheajattelulla saataisiin tulos  $3/4$ . Lisää todennäköisyyslaskentaankin liittyviä paradokseja löytyy esimerkiksi netistä osoitteista

- [home1.gte.net/deleyd/random/probprdx.html](http://home1.gte.net/deleyd/random/probprdx.html)
- [mathforum.org/dr.math/faq/faq.classic.problems.html](http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.classic.problems.html)
- [www.math.hmc.edu/funfacts/](http://www.math.hmc.edu/funfacts/)
- [www.cut-the-knot.org/probability.shtml](http://www.cut-the-knot.org/probability.shtml)