Black ja Scholes ilman Gaussia

Tommi Sottinen

Vaasan yliopisto

SMY:n vuosikokousesitelmä 19.3.2012

Johdanto

Tarkastelemme johdannaisten, eli kansankielellä optioiden, hinnoittelua. Kuuluisin hinnoittelumalli on niin sanottu Blackin ja Scholesin malli. Tämä malli olettaa, että johdannaisen kohde-etuuden tuotot ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita. Tämä oletus ei ole juurikaan koskaan totta todellisessa maailmassa. Osoitamme, että se ei kuitenkaan haittaa.

Sisältö

1 Johdannaiset ja niiden hinnoittelu

2 Black ja Scholes: menestystarina?

3 Neliöheilahtelumallit

Sisältö

1 Johdannaiset ja niiden hinnoittelu

2 Black ja Scholes: menestystarina?

3 Neliöheilahtelumallit

Tarkastelemme markkinoita, joissa on vain kaksi mahdollista sijoituskohdetta.

Määritelmä (Sijoituskohteet)

$(B_t)_{t\in[0,T]}$ on riskitön (eli deterministinen) sijoitus, esimerkiksi pankkitili. Valitsemme sen numerääriksi, eli tarkastelemme diskontattuja markkinoita:

$$B_t \;=\; 1 \qquad \text{kaikilla } t \in [0, T].$$

$S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ on riskillinen (eli satunnainen) sijoitus, esimerkiksi osake.

Oletamme, että polut $t \mapsto S_t(\omega)$ ovat jatkuvia kaikilla ω.

Määritelmä (Johdannainen)

Kohde-etuuteen S liittyvä johdannainen G on kuvaus $S \mapsto G(S)$.

Esimerkki

- $G = (S_T - K)^+$ on osto-optio,
- $G = (K - S_T)^+$ ion myyntioptio,
- $G = S_T - K$ on futuuri.

T on johdannaisen juoksuaika K on lunastushinta.

Määritelmä (Omavarainen sijoitusstrategia)

Sijoitusstrategia $\Phi = (\Phi_t)_{t\in[0,T]}$ on $(\mathcal{F}_t^S)_{t\in[0,T]}$-sopiva stokastinen prosessi, joka kertoo kuinka monta yksikköä kohde-etuutta S sijoittajalla on portfoliossaan hetkellä $t \in [0, T]$.

Φ on omavarainen, jos sen varallisuus $V = V(\Phi)$ toteuttaa budjettirajoituksen

$$\mathrm{d}V_t = \Phi_t \,\mathrm{d}S_t.$$

Budjettirajoitus on etuperäinen differerentiaaliyhtälö. Toisin sanoen se tarkoittaa, että infinitesimaalisella $\mathrm{d} > 0$ pätee

$$V_{t+\mathrm{d}} = \Phi_t S_{t+\mathrm{d}} + (V_t - \Phi_t S_t)\,.$$

Yksi Johdannaisten hinnoitteluperiaate tulee arbitraasivapaudesta.

Määritelmä (Arbitraasi)

Omavarainen sijoitusstrategia Φ on arbitraasi, jos $V_0 = 0$, $V_T \geq 0$ ja $\mathbf{P}[V_T > 0] > 0$.

Määritelmä (Arbitraasiperiaate)

Johdannaisen G arbitraasivapaa hinta hetkellä t, P_t, on mikä tahansa sellainen hinta, että kolmen sijoituskohteen (B, S, P) markkinoilla ei ole arbitraasia.

Luonnollisesti, jos (B, S)-markkinoilla on jo valmiiksi arbitraasia, ei johdannaisilla voi olla arbitraasivapaita hintoja.

Myös suojausperiaatteella voi hinnoitella johdannaisia.

Määritelmä (Suojausperiaate)

Jos on olemassa omavarainen sijoitusstrategia Φ, joka suojaa johdannaisen G, eli $V_T(\Phi) = G$, niin johdannaisen G suojaushinta on $V_0(\Phi)$.

Omavaraisuuden nojalla suojausvaatimus $G = V_T(\Phi)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$G = V_0(\Phi) + \int_0^T \Phi_t \, \mathrm{d}S_t,$$

missä integraali on "etuperäistä" tyyppiä.

Sisältö

1 Johdannaiset ja niiden hinnoittelu

2 Black ja Scholes: menestystarina?

3 Neliöheilahtelumallit

Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli olettaa, että tuotolle pätee

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t,$$

missä W on Brownin liike.

Tämän stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on (viettävä) geometrinen Brownin liike

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Blackin ja Scholesin mallissa on kaksi estimoitavaa parametria: osakkeen keskimääräinen tuotto μ (joka on johdannaisten hinnoittelun kannalta irrelevantti) ja osakkeen volatiliteetti σ (jonka estimointi ja oikea tulkinta on hinnoittelun kannalta keskeistä).

Blackin ja Scholesin malli on teoreettiselta kannalta ihanteellinen:

Malli on ARBITRAASIVAPAA: Tämä seuraa siitä, että voimme määritellä $\mathbf{P}$:n kanssa ekvivalentin mitan $\tilde{\mathbf{P}}$, jonka suhteen S on martingaali. Tällöin jokaisen johdannaisen arbitraasivapaa hinta on itse asiassa $\tilde{\mathbf{E}}[G]$.

Malli on TÄYDELLINEN: Jokainen johdannainen voidaan suojata, ja lisäksi suojaushinta on yksikäsitteinen ja se on sama kuin arbitraasivapaa hinta. Erityisesti ekvivalentti martingaalimitta $\tilde{\mathbf{P}}$ on yksikäsitteinen. Kaikki tämä seuraa ITÔ:N ESITYSLAUSEESTA:

$$\forall G \exists \Psi : \quad G \;=\; \mathbf{E}[G] + \int_0^T \Psi_t \, \mathrm{d}W_t.$$

Blackin ja Scholesin mallissa monien johdannaisten hinnat ja suojausstrategiat voidaan jopa laskea! Esimerkiksi Vaniljaoption $G = g(S_T)$ hinta ja suojaus saadaan joko ratkaisemalla Blackin ja Scholesin ODY

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

reunaehdolla $v(T, x) = g(x)$. Tällöin suojausstrategia on

$$\Phi_t = \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t).$$

Yhtä hyvin voisimme myös käyttää Feynman–Kacin kaavaa

$$v(t, x) = \mathbf{E}\left[g\left(x e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \right].$$

Blackin ja Scholesin geometriseen Brownin liikkeeseen perustuva malli olettaa, että

1. tuotot ovat riippumattomia ja
2. tuotot ovat normaalisti jakautuneita.

Kumpikaan oletus ei pidä paikkaansa käytännössä!

Kuitenkin esimerkiksi vaniljaoptioiden $G = g(S_T)$ Gaussinen hintakaava

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}y$$

näyttää pätevän käytännössä.

Sisältö

1 Johdannaiset ja niiden hinnoittelu

2 Black ja Scholes: menestystarina?

3 Neliöheilahtelumallit

Blackin ja Scholesin mallissa hinnoittelu- ja suojauskaavat seuraavat välittömästi ITÔN KAAVASTA

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mathrm{d}X_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(\mathrm{d}X_t)^2. \end{aligned}$$

Föllmerin (1981) keskeinen havainto oli, että Itôn kaava voidaan tulkita poluttain ilman martingaaliteoriaa. Tämä sopii hyvin johdannaisten hinnoitteluun, sillä suojaaminenkin on poluttaista. Lisäksi Itôn kaavalla voidaan MÄÄRITELLÄ stokastinen integraali.

Myöhemmin Schoenmakers ja Kloeden (1999) sovelsivat Föllmerin havaintoa vaniljajohdannaisten hinnoitteluun ja toistamiseen.

MÄÄRITELMÄ (σ^2-HINNOITELUMALLI)

Hinnoittelumalli S (tai pikemminkin sen jakauma $\mathbf{P}_S$) on σ^2-HINNOITTELUMALLI, jos

1. S:llä on jatkuvat polut
2. S:llä on Blackin ja Scholesin neliöheilahtelu: $(\mathrm{d}S_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t$.
3. S:llä on täydet ehdolliset kantajat:

$$\operatorname{supp} \mathbf{P}[(S_s)_{s\in[t,T]} \in \cdot \,|\mathcal{F}_t^S] \;=\; C_{S_t,+}[t,T].$$

Ehtoja 1 ja 2 tarvitaan, jotta Itôn kaava pätisi Black & Scholes muodossa. Ehtoa 3 tarvitaan, jotta voimme vaihtaa singulaarisista

Meillä ei ole käytössä mitään yleistä integroimisteoriaa vaan joudumme tyytymään Itôn kaavaan. Siksi tarkastelemme vain "sallittuja sijoitusstrategioita".

Määritelmä (Sallittu strategia)

Sijoitusstrategia Φ on sallittu, jos se on muotoa

$$\Phi_t \;=\; \varphi(t, S_t, g_1(t,S), \ldots, g_n(t,S)),$$

missä φ on sileä ja g_i:t toteuttavat "teknisiä ehtoja".

Tyypillisesti g_i:t ovat esimerkiksi juoksevia maksimeja, minimejä tai keskiarvoja osakekurssista S.

Lause (Blackin ja Scholes suojaamiset toimivat ilman Gaussia)

Jos johdannainen G on jatkuva osakepolun suhteen ja se voidaan suojata Blackin ja Scholesin mallissa sallitulla strategialla, niin se voidaan suojata myös missä tahansa σ^2-hinnoittelumallissa ja suojausstrategia on, poluttain, sama.

Koska σ^2-mallit voivat olla semimartingaalimalleja tai sitten eivät, niin ne saattavat sisältää arbitraasia. Arbitraasimahdollisuudet ovat kuitenkin “erikoisia”, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause (Arbitraasivapaus)

Sallituilla strategioilla ei voi tehdä arbitraasia.

Blackin ja Scholesin malli siis toimii ilman jakaumaoletuksia: se antaa oikeat suojaushinnat johdannaisille, eikä tyypillisillä suojausstrategioilla voi tehdä arbitraasia. Siten suojaushinnat ovat, ainakin jossakin mielessä, myös arbitraasivapaita hintoja.

Mutta, jotta hinnat olisi laskettu oikein, pitää volatiliteetti ymmärtää oikein. Volatiliteetti tulee siis kaavasta

$$(\mathrm{d}S_t)^2 \ = \ \sigma^2 S_t \mathrm{d}t.$$

Blackin ja Scholesin mallin tapauksessa tämä on sama kuin osakekurssin tuottojen pitkän aikavälin historiallinen varianssi, mutta yleisessä σ^2-mallissa näin ei välttämättä ole.

Perinteinen HISTORIALLINEN VOLATILITEETTI on siis väärä estimaattori hinnoittelumallien volatiliteetille. Sen sijaan tulee käyttää joko JOHDETTUA VOLATILITEETTIA tai LYHYEN AIKAVÄLIN ESTIMOINTIA.

Viitteet

- Black & Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* **81**(3).
- Föllmer (1981). Calcul d'Itô sans probabilités. *Séminaire de Probabilités* **XV**.
- Schoenmakers & Kloeden (1999). Robust option replication of a Black-Scholes model extended with nondeterministic trends. *J. Appl. Math. Stoch. Analysis* **12**.
- Bender, S. & Valkeila (2008). Pricing by hedging and no-arbitrage beyond semimartingales. *Finance and Stochastics* **12**.