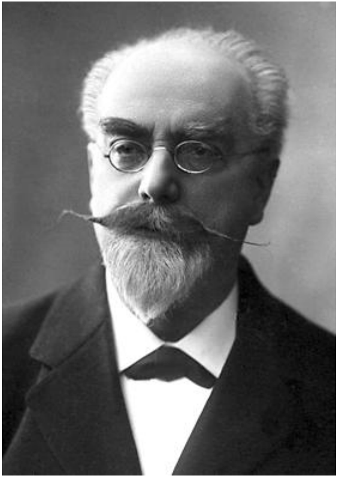
Finanssijohdannaisten gaussiset hinnat ja keskeisen raja-arvolauseen väärinymmärrys

Tommi Sottinen

Vaasan yliopisto

MAL 60 vuotta juhlaseminaari 12.11.2021

Motto: Normaalijakauma ei ole normaali



Gabriel Lippmann (1845–1921)

Fysiikan nobelisti vuodelta 1908

Kaikki uskovat Gaussin normaalijakaumaan:

- Fyysikot uskovat siihen, koska he luulevat sen olevan matemaattinen totuus.
- Matemaatikot uskovat siihen, koska he luulevat sen olevan luonnonlaki.
- Tietojenkäsittelijät uskovat siihen, koska... (Eivätpä taida uskoakaan: ehkä meillä on toivoa!)

Sisältö

Sisältö

Finanssijohdannainen

Eurooppalainen finanssijohdannainen on sopimus, joka antaa eräpäivänä T satunnaisen tuoton $f(S_T)$, missä S on sopimukseen liittyvä kohde-etuus, eli arvopaperi.

Jos esimerkiksi $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$, niin kyseessä on eurooppalainen osto-optio lunastushinnalla K. Tämä tarkoittaa, että osto-opion haltijalla on oikeus ostaa kohde-etuus S eräpäivänä T hinnalla K.

Eurooppalainen myyntioptio lunastushinnalla K on $f(S_T) = \max(K - S_T, 0)$.

Sisältö

BS-hinnoittelumalli

Black–Scholes -hinnoittelumalli olettaa, että (diskontattu) arvopaperin kurssin S toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,$$

missä W on Brownin liike.

Erityisesti tästä seuraa, että tuotot ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita:

$$R = \frac{\mathrm{d}S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \mathrm{d}t\,,\, \sigma^2 \mathrm{d}t).$$

BS-hinnoittelumalli

Johdannaisen $f(S_T)$ hinta BS-mallissa on sen odotusarvo EKVIVALENTIN MARTINGAALIMITAN $\mathbb{Q}$ suhteen. Mitta $\mathbb{Q}$ on sellainen, että sen suhteen viettävä prosessi

$$W^{\mathbb{Q}} = W + \frac{\mu}{\sigma}t$$

on Brownin liike.

Hinta voidaan ilmoittaa standardinormaalitiheyden φ avulla GAUSSISENA INTEGRAALINA

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} f(S_T) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T}\right) \varphi(y)\mathrm{d}y.$$

BS-hinnoittelu käytännössä

BS-hinnoittelu on laajasti käytössä. Investopedia sanoo BS-mallista mm. seuraavaa:

- The Black-Scholes model, aka the Black-Scholes-Merton (BSM) model, is a differential equation widely used to price options contracts.
- Though usually accurate, the Black-Scholes model makes certain assumptions that can lead to prices that deviate from the real-world results.

Sisältö

Arvopaperimarkkinoiden gaussisuus?

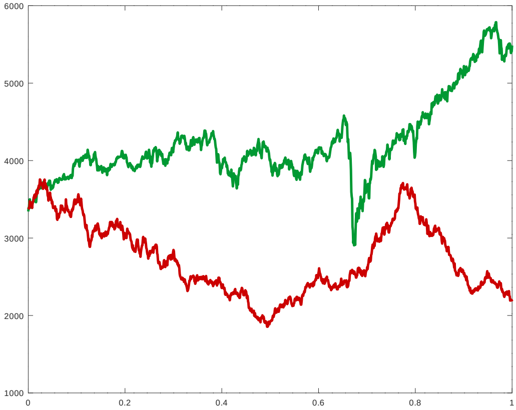
BS-hinnat ovat siis widely used ja usually accurate. Entäpä BS-mallin oletus. Se siis olettaa, että (diskontatut) tuotot

$$R = \frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W$$

ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita.

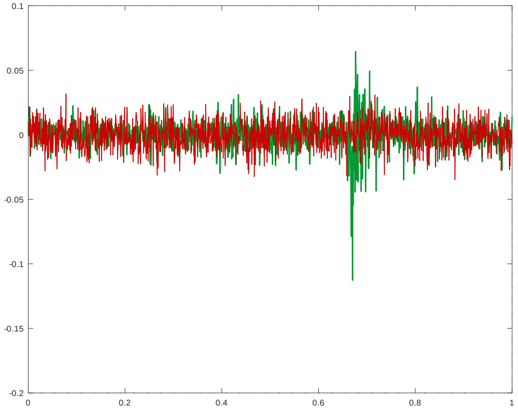
Tarkastekaamme esimerkin vuoksi Helsingin pörssin OMXH25-indeksiä viimeiseltä viideltä vuodelta (1247 havaintoa). Koska kyseessä on 25 arvopaperin indeksi viideltä vuodelta, voimme ainakin yrittää loihtia esiin keskeistä raja-arvolausetta.

Arvopaperimarkkinoiden gaussisuus?



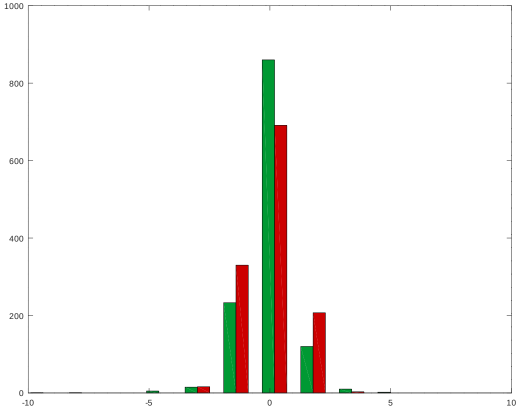
Todellinen S (vihreä) ja BS-mallin simuloitu S (punainen).

ARVOPAPERIMARKKINOIDEN GAUSSISUUS?



Todellinen R (vihreä) ja BS-mallin simuloitu R (punainen).

Arvopaperimarkkinoiden gaussisuus?



Todellinen (vihreä) ja BS-mallin simuloitu (punainen).

Arvopaperimarkkinoiden gaussisuus?

Havaintoja:

- Edes viiden vuoden indeksi (summataan sekä arvopapereita että aikaa) ei loitsi esiin normaalijakaumaa $\Longrightarrow$ KESKEINEN RAJA-ARVOLAUSE EI TÄSSÄ TOIMI!
- Silti BS-mallin NORMAALIHINNAT PÄTEVÄT.
- Onko kyseessä ITSENSÄ TOTEUTTAVA ENNUSTUS vai jotain muuta.
- Koska kyseessä ovat JÄRKYTTÄVÄN ISOT RAHAT ja ÄÄRIMMÄISEN KILPAILTU ALA, kyseessä täytyy olla jotain muuta!

Sisältö

Itô–Föllmer-integrointi ja neliöheilahtelu

Oletamme että arvopaperin S hintapolku on JATKUVA ja sillä on NELIÖHEILAHTELU

$$(\mathrm{d}S)^2 = \sigma^2 S^2 \mathrm{d}t$$

HUOMAUTUS: *Tästä ei seuraa, että tuotot $R = \mathrm{d}S/S$ ovat normaalisti jakautuneita. Itse asiassa tästä ei seuraa (juurikaan) mitään* JAKAUMAOMINAISUUKSIA.

Keskeinen seuraus tästä on ns. FÖLLMER–ITÔ-KAAVA (eli muuttujanvaihtokaava): olkoon $g = g(t,S) = g(t,S_t)$, tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g &= \frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial S}\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

Suojausperiaate

Olkoon $g = g(t, S)$ sijoitusstrategia, joka kertoo kuinka monta arvopaperia S omistetaan hetkellä t, kun arvopaperin hinta hetkellä t on $S = S_t$.

Sijoitusstrategia g on omavarainen, jos sen arvo V toteuttaa yhtälön

$$\mathrm{d}V = g\mathrm{d}S.$$

Sijoitusstrategia g suojaa eli toistaa finanssijohdannaisen $f = f(S_T)$, jos sen arvo toteuttaa $V_T = f(S_T)$. Tällöin suojausperiaate sanoo, että johdannaisen f hinta (hetkellä 0) on V_0.

Delta-suojaus

Haluamme suojata (ja siten myös hinnoitella) johdannaisen $f(S)$.

Olkoon $v = v(t, S)$ sellainen (arvo)funktio, että se toteuttaa seuraavan (takaperoisen) BS-ODY:n

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} &= 0, \\ v(T, S) &= f(S). \end{aligned}$$

Tällöin sijoitusstrategiaa (eli salkkua)

$$g = \frac{\partial v}{\partial S}$$

kutsutaan delta-suojaukseksi.

Delta-suojaus

Salkku g suojaa johdannaisen f, sillä Föllmer–Itô-kaavan nojalla

$$
\begin{aligned}
f(S_T) &= v(T, S_T) \\
&= v(0, S_0) + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)\,\mathrm{d}S_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t, S_t)(\mathrm{d}S_t)^2 \\
&= v(0, S_0) + \int_0^T g(t, S_t)\,\mathrm{d}S_t \\
&\quad \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t, S_t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= v(0, S_0) + \int_0^T g(t, S_t)\,\mathrm{d}S_t.
\end{aligned}
$$

BS-ODY ja Feynman–Kac

Mistä sitten saamme gaussisuuden? Jokainen fyysikko varmaan tunnistaa BS-ODY:n

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} &= 0, \\
v(T, S) &= f(S).
\end{aligned}$$

Sen (alku)ratkaisu saadaan Feynman–Kac-kaavalla:

$$v(0, S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T} \right) \varphi(y) \mathrm{d}y.$$

Sisältö

Keskeinen raja-arvorikos ja muita loppuhuomioita

- BS-mallin ennustamat gaussiset hinnat voivat pitää paikkansa, vaikka malli (tai todellisuus) ei olisikaan gaussinen.
- Gaussisuus voi pitää paikkansa vaikka keskeistä raja-arvolausetta ei voisikaan soveltaa.
- Keskeinen raja-arvolause soveltuu tai ei sovellu: se ei tarvitse meidän apuamme!
- Pakottaminen normaalijakaumaan loitsimalla keskeistä raja-arvolausetta kädet huitoen riippumattomia summia on keskeinen raja-arvorikos!